பண்புரு விளக்க நூல்

(TENSOR ANALYSIS)

சு. நாராயணசுவாமி

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—626

பண்புரு விளக்கநூல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

சு. நாராயணசுவாமி, எம்.எஸ்ஸி.,
கணித விரிவுரையாளர்,
மண்டலப் பொறியியற் கல்லூரி,
திருச்சிராப்பள்ளி.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1975

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 626

© Tamilnadu Textbook Society

TENSOR ANALYSIS

S. NARAYANASWAMY

Price Rs. 9-15

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
Super Power Press,
11, Francis Joseph Street,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினைந்தாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பட்டப் படிப்பு வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவருகின்றனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும், சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், மெய்ப்பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டம் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூல நூல்கள் மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகின்றது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**பண்புரு விளக்கநூல்**' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **626**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க்குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **661** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும், கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளரவேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ் எங்கும் தமிழ்' என்ற குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு, தமிழகத்து ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1. இலக்கெண் அமைப்புகள் (Co-ordinate Systems) ... 1
2. நேர்கோட்டிய வெக்டர் வெளிகள் (Linear Vector Spaces) ... 21
3. மரபுகள் (Conventions) ... 33
4. பண்புருக்கள் (Tensors) ... 43
5. பண்புரு இயற்கணிதம் (Tensor Algebra) ... 61
6. அளவைப் பண்புரு (The Metric Tensor) ... 84
7. பண்புரு நுண்கணிதம் (Tensor Calculus) ... 124
8. குறுக்கடிகள் (Geodesics) ... 171
9. கோட்டப் பண்புரு (The Curvature Tensor) ... 187
10. வெளி வளைவுகளின் வடிவ கணிதம் (Geometry of Space Curves) ... 215
11. தளத்தின் உள்ளார்ந்த வடிவ கணிதம் (Intrinsic Geometry of Surface) ... 228
12. துகளின் இயக்கவிசையியல் (Dynamics of a particle) 286
13. தெக்காட்டின் பண்புருக்கள் (The Cartesian Tensors) ... 310
14. கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தின் இயக்கவிசையியல் (Dynamics of a rigid body) ... 316

மேற்கோள் நூற்பட்டியல் (Bibliography) ... 330

கலைச்சொற்கள் ... 332

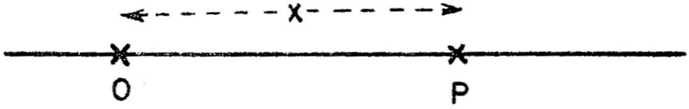
1. இலக்கெண் அமைப்புகள்
(Co-ordinate Systems)

1. இலக்கெண் அமைப்பு

ஒரு வெளியில் (space) ஒரு புள்ளியின் அமைநிலையை (position) ஓர் எண்ணாலோ அல்லது முறைப்படுத்தப்பட்ட எண்தொகுதிகளினாலோ (ordered set of numbers) குறிக்கலாம். இவ்வாறு குறிப்பதற்கு **இலக்கெண் அமைப்பு** (Co-ordinate System) என்று பெயர்.

2. ஒரு-பரிமாண வெளி (One-dimensional Space)

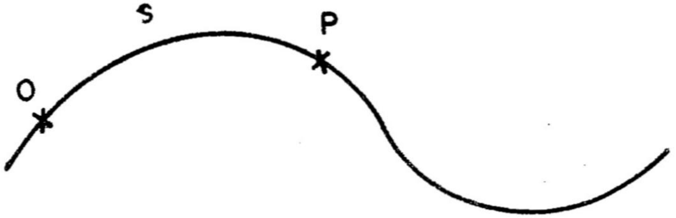
ஒரு நேர்கோட்டின் மேல் அமைந்த P என்ற புள்ளியின் அமை நிலையை x என்ற தனி எண்ணால் குறிக்கிறோம். இதில் x என்பது நேர்கோட்டின் மேலமைந்த O என்ற நிலைப்புள்ளிக்கும் (fixed point) Pக்கும் இடையே உள்ள தூரம்.



O-வை **ஆதி** (origin) என்றும், x-ஐ, P என்ற புள்ளியின் **இலக்கெண்** (Co-ordinate) என்றும் அழைக்கிறோம். O-வுக்கு வலப் பக்கத்தில் P இருக்கும்போது x-ஐ மிகை எண்ணாகவும், இடப் பக்கத்தில் இருக்கும்போது குறை எண்ணாகவும் கொள்வது மரபு. O-ன் மேலேயே P அமைந்தால் $x=0$.

இதேபோல், ஒரு வளைகோட்டின் மேலும் ஒரு புள்ளியின் அமைநிலையை s என்ற தனி எண்ணால் குறிக்கிறோம்.

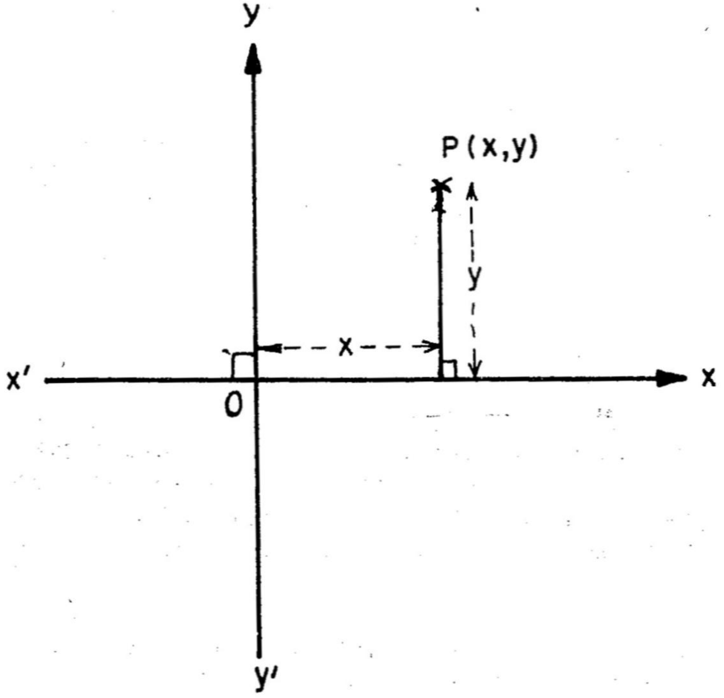
இதில் *s* என்பது வளைகோட்டின் மேலுள்ள ஓர் ஆதியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட, புள்ளியின் வில் தூரம் (arc-distance). இங்கு *s* என்பதே அந்தப் புள்ளியின் இலக்கெண் ஆகும்.



ஒரு நேர்கோட்டின் மீதோ அல்லது ஒரு வளைகோட்டின் மீதோ புள்ளியின் நிலையைக் குறிக்க ஒரேவோர் எண் போதுமானது. எனவே, நேர்கோடு, வளைகோடு இவற்றை **ஒரு-பரிமாண வெளி** என அழைக்கிறோம்.

3. இரு-பரிமாண வெளி (Two-dimensional Space)

ஒரு சமதளத்தில் (plane), ஒரு புள்ளியின் அமைநிலையை, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான XOX', YOY' என்ற இரு நேர்



கோடுகளை அச்சுகளாகக் (axes) கொண்டு (x, y) என்ற இரு முறைப்படுத்தப்பட்ட எண்களால் குறிக்கிறோம்.

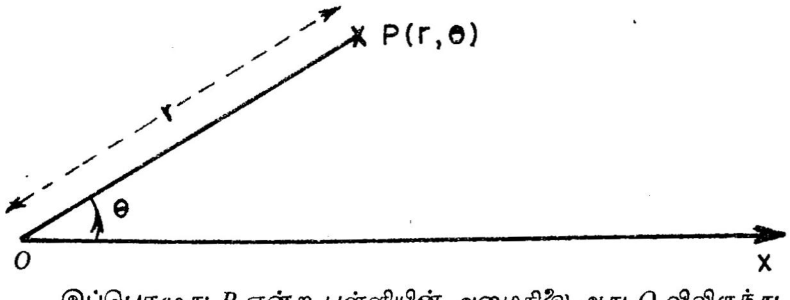
x, y என்பன அப்புள்ளியின் இலக்கெண்கள். x என்பது OY லிருந்தும், y என்பது OX லிருந்தும் அப்புள்ளி உள்ள தூரங்கள் ஆகும். இந்த முறையில், சமதளத்தில் புள்ளியைக் குறிப்பது தெக்காட்டே (Des Cartes) என்ற கணிதமேதையால் முதலில் தோற்றுவிக்கப்பட்டதால் (x, y) என்பன **தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள்** (Cartesian Co-ordinates) என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

வெக்டர் இயற்கணிதத்தைப் (Vector algebra) பயன்படுத்தி ஒரு சமதளத்தின் மேலுள்ள $P(x, y)$ என்ற புள்ளியின் $\mathbf{r} = \overline{OP}$ என்ற அமைநிலை வெக்டரை (Position vector)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

என்று குறிக்கலாம். இதில் $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ என்பன OX, OY என்ற திசைகளில் அலகு வெக்டர்கள் (unit vectors) ஆவன.

ஒரு சமதளத்தின் மேல் ஒரு புள்ளியின் அமைநிலையை வேறொரு முறையைக்கொண்டும் குறிக்கலாம். இம்முறையில் O என்ற ஒரு நிலைப்புள்ளியையும், அதன் வழியாகச் செல்லும் OX என்ற நேர் கோட்டையும் எடுத்துக் கொள்கிறோம்.



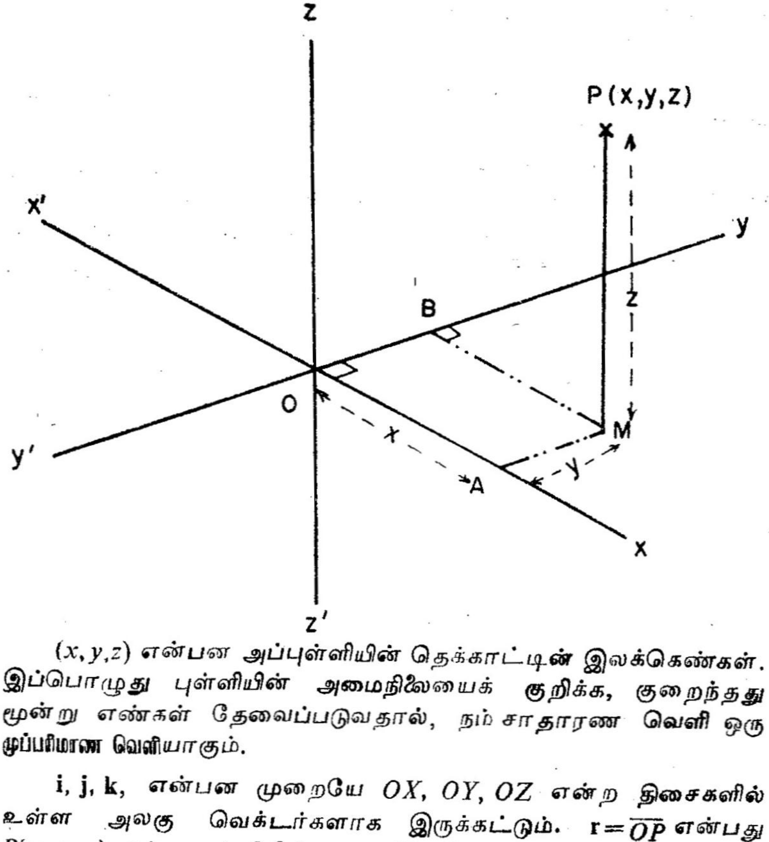
இப்பொழுது P என்ற புள்ளியின் அமைநிலை அது O விலிருந்து உள்ள தூரம் r ஆலும் OX உடன் OP மிகைத்திசையில் (Positive direction) ஏற்படுத்துகின்ற கோணம் θ ஆலும் உறுதி செய்யப்படுகின்றது.

O வைத் துருவம் (Pole) என்றும் OX ஐத் தொடக்க அச்சு என்றும் கூறுகிறோம். (r, θ) என்பனவற்றைத் துருவ இலக்கெண்கள் (Polar Co-ordinates) என்றும், இம்முறையில் புள்ளியைக் குறிப்பதற்குத் **துருவ இலக்கெண் அமைப்பு** (Polar Coordinate System) என்றும் அழைக்கிறோம்.

ஒரு சமதளத்தின் மேல் புள்ளியின் அமைநிலையைக் குறிக்கக் குறைந்தது இரண்டு முறைப்படுத்தப்பட்ட எண்கள் தேவைப்படுவதால் அதை ஓர் இரு-பரிமாண வெளி (Two-dimensional Space) என்கிறோம்.

4. முப்பரிமாண வெளி

நாம் நாள்தோறும் உலவி வரும் சாதாரண வெளியில், ஒரு புள்ளியின் அமைநிலையை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான XOX', YOY', ZOZ', என்ற மூன்று நேர்கோடுகளை அச்சுகளாகக் கொண்டு (x,y,z) என்ற மூன்று முறைப்படுத்தப்பட்ட எண்களால் குறிக்கிறோம்.



(x,y,z) என்பன அப்புள்ளியின் தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள். இப்பொழுது புள்ளியின் அமைநிலையைக் குறிக்க, குறைந்தது மூன்று எண்கள் தேவைப்படுவதால், நம் சாதாரண வெளி ஒரு முப்பரிமாண வெளியாகும்.

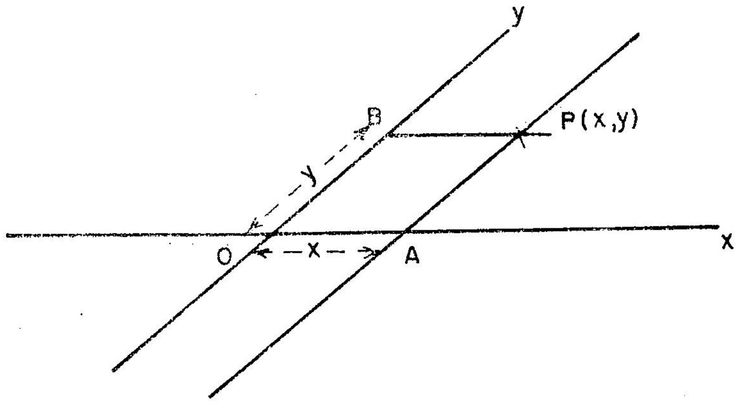
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, என்பன முறையே OX, OY, OZ என்ற திசைகளில் உள்ள அலகு வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். $\mathbf{r} = \overline{OP}$ என்பது $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் அமைநிலை வெக்டரானால்

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

5. நூற்பிரிவுகள் 3, 4-ல் சொல்லப்பட்ட தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்புகள் **செவ்வக அமைப்புகள்** (Rectangular Systems) எனப்படும். ஏனெனில், இவற்றில் எடுத்துக்கொண்ட அச்சுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. இம்முறைகளில் புள்ளியின் அமைநிலையைச் சுட்டுவதற்கு (குறிப்பிடுவதற்கு) எடுத்துக் கொண்ட **சுட்டச்சுகள்** (axes of reference) ஒன்றுக்கொன்று இடையே செங்கோணத்தை அடக்கி உள்ளதாலும், புள்ளி வழியே சுட்டச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடுகள், நேர்கோடுகள் ஆதலாலும் மேற்கூறிய முறைகளை **செங்கோண நேர்கோட்டிய அமைப்புகள்** (Orthogonal Rectilinear Systems) என்றும் கூறலாம்.

இவையே போன்று (1) சுட்டச்சுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இல்லாத **சரிவு நேர்கோட்டிய அமைப்புகள்** (Oblique Rectilinear Systems), (2) சுட்டச்சுகள் வளைகோடுகளாக அமைந்து, அவற்றில் ஒன்றுக்கொன்று இடையே உள்ள கோணங்கள் செங்கோணங்களாக அமையும் **செங்கோண வளைகோட்டிய அமைப்புகள்** (Orthogonal Curvilinear Systems) ஆகியவற்றையும் நாம் விளக்கி வரையறை செய்யலாம்.

6. சரிவு நேர்கோட்டிய அமைப்புகள்



இம்முறையில், ஒரு சமதளத்தில், ஒன்றையொன்று ஏதோவொரு கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்ளும் *OX*, *OY* என்ற இரண்டு நேர்கோடுகளைச் சுட்டச்சுகளாக எடுத்துக்கொள்கிறோம். தளத்தின் மேலுள்ள *P* என்ற புள்ளியின் வழியாக அச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்படும் நேர்கோடுகள் *OX*, *OY* இவற்றை முறையே *A*, *B*-ல் வெட்டுகின்றன.

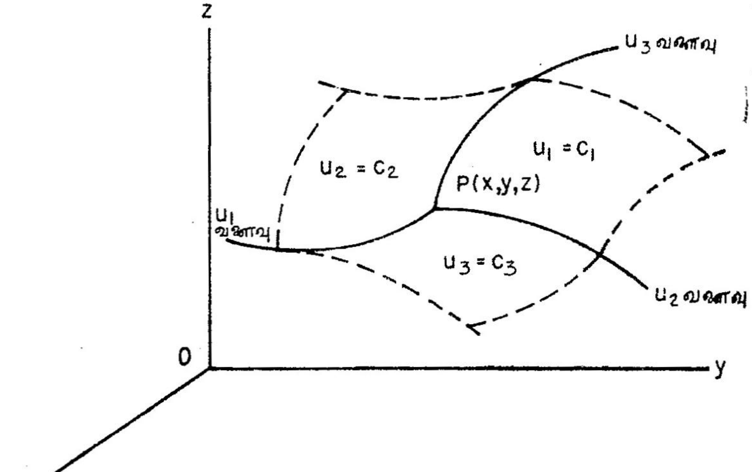
$OA = x$, $OB = y$ ஆக இருந்தால் (x, y) என்பனவற்றை P-ன் சரிவு இலக்கெண்கள் (Oblique Co-ordinates) எனக் கூறுகிறோம்.

$\mathbf{l}_x$, $\mathbf{l}_y$ என்பன முறையே OX, OY திசைகளில் அமைந்த அலகு வெக்டர்களாயின், புள்ளியின் அமைநிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$ பின்வருமாறு குறிக்கப்படும்.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{l}_x + y\mathbf{l}_y$$

இவ்வாறே முப்பரிமாணத்திலும் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்ளாத மூன்று நேர்கோடுகளைச் சுட்டச்சுகளாகக் கொண்டு, புள்ளியின் வழியாக இலக்குச் சமதளங்களுக்கு (Coordinate Planes) இணையாகத் தளங்கள் வரைந்து அப்புள்ளியின் அமைநிலையை (x, y, z) என்ற சரிவு இலக்கெண்களால் குறிக்கலாம்.

7. வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பு



(x, y, z) என்பன OX, OY, OZ என்ற ஓர் அச்சுத் தொகுதியினால் வரையறுக்கப்பட்ட P என்ற புள்ளியின் தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் எனக் கொள்க.

x, y, z என்பனவற்றை u_1, u_2, u_3 என்ற மாறிகளின் சார்புகளாகக் குறிக்கமுடியும் என்றும் கொள்க.

அதாவது :

$$x=x\,(u_1, u_2, u_3),\ y=y\,(u_1, u_2, u_3),\ z=z\,(u_1, u_2, u_3) \qquad (7\text{-}1)$$

7·1ல் கூறப்பட்ட சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி u_1, u_2, u_3 இவற்றிற்கு x, y, z மூலமாகத் தீர்வு காண்போமாஞல்

$$u_1=u_1\,(x, y, z),\ u_2=u_2\,(x, y, z),\ u_3=u_3\,(x, y, z) \qquad (7\cdot2)$$

கிடைக்கின்றன.

7·1, 7·2 இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு தன்னிகரில்லாத தாக (unique) இருக்க வேண்டுமாஞல்

$\left|\dfrac{\partial\,(u_1, u_2, u_3)}{\partial\,(x, y, z)}\right|$ என்ற யாக்கோப்பின் அணிக்கோவை (Jacobian Determinant) பூச்சியம் இல்லாதிருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இருப் பின் (7·2) ன் உதவி கொண்டு $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியுடன் u_1, u_2, u_3 என்ற தன்னிகரில்லாத மூன்று அளவைகளைத் தொடர்பு படுத்த முடியும். (u_1, u_2, u_3) என்பனவற்றை P-ன் **வளைகோட்டிய இலக்கெண்கள்** (Curvilinear Coordinates) என்று கூறுகிருேம்.

P வழியாகச் செல்லும் $u_1=c_1, u_2=c_2, u_3=c_3$ என்ற தளங் களை (Surfaces) **இலக்குத் தளங்கள்** (Coordinate Surfaces) எனச் சொல்கிருேம். இத்தளங்கள் இரண்டிரண்டாக வளைகோடுகளில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. இவ்வாறு கிடைக்கும் வளைகோடுகளை **இலக்கு வளைவுகள்** (Coordinate Curves) என்கிருேம்.

$u_2=c_2, u_3=c_3$ என்ற தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் வளை கோட்டின் மேல் u_1 மட்டுமே மாறுகின்றது. எனவே, அதை u_1 வளைவு எனக் குறிக்கிருேம். இதேபோன்று $u_3=c_3,\ u_1=c_1$ என்ற தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் வளைகோட்டை u_2 வளைவு என்றும், $u_1=c_1,\ u_2=c_2$ வெட்டிக்கொள்வதை u_3 வளைவு என்றும் இயம்புகிருேம்.

மேற்சொன்ன வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பில் $u_1=c_1, u_2=c_2, u_3=c_3$ என்ற தளங்கள் ஒன்றையொன்று செங் கோணத்தில் வெட்டிக்கொண்டால் அம்முறையைச் **செங்கோண வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பு** (Orthogonal Curvilinear Coordinate System) என்று சொல்லுகிருேம்.

8. சிறப்புச் செங்கோண இலக்கெண் அமைப்புகள் (Special Orthogonal Co-ordinate System)

8 (a). உருளை இலக்கெண்கள் (ρ, ϕ, z) **(Cylindrical Co-ordinates):** $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் (ρ, ϕ, z) என்ற உருளை இலக்கெண்கள் பின்வரும் சமன்பாடுகளால் வரையறை செய்யப் படுகின்றன.

$$x=\rho \cos \phi, \ y=\rho \sin \phi, \ z=z$$

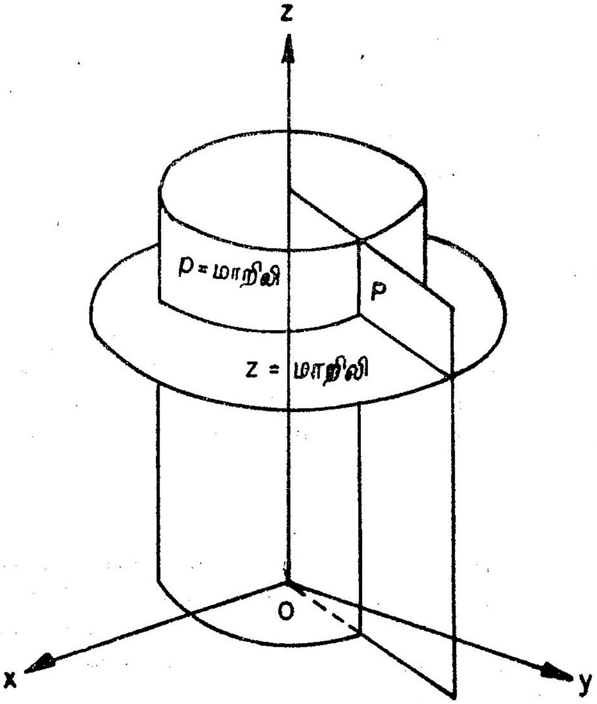
இங்கே, $\rho \geqslant o, \ o \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \ -\infty < z < \infty$

இவ்வமைப்பின் இலக்குத் தளங்கள் பின்வருமாறு:

$\rho=c_1$ என்பது Z அச்சை மைய அச்சாகக் கொண்ட உருளை.

$\phi=c_2$ என்பது Z அச்சின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு சம தளம்.

$z=c_3$ என்பது Z அச்சுக்குச் செங்குத்தான ஒரு சம தளம்.



இவ்வமைப்பின் இலக்கு வளைவுகள் பின்வருமாறு :

$\rho=c_1, \phi=c_2$ என்பது ஒரு நேர்கோடு→Z வளைவு

$\rho=c_1, Z=c_3$ என்பது ஒரு வட்டம்→ϕ வளைவு

$\phi=c_2, Z=c_3$ என்பது ஒரு நேர்கோடு ρ வளைவு.

உருளை இலக்கெண் அமைப்பு ஒரு செங்கோண அமைப்பு என்று நிரூபிக்கலாம்.

$P(x, y, z)$ அதாவது $P(\rho, \phi, z)$-ன் அமைநிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$-ஐப் பின்வருமாறு குறிக்கலாம் :

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{K}=\rho \cos\phi\, \mathbf{i}+\rho \sin\phi\mathbf{j}+z\mathbf{K}$$

ρ, ϕ, z வளைவுகளின் தொடுகோட்டு வெக்டர்கள் (tangent vectors) $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$ என்பன.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}=\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}=-\rho\sin\phi\mathbf{i}+\rho\cos\phi\mathbf{j},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}=\mathbf{K}$$

ஆகின்றன.

எனவே அத்திசைகளில் அலகு வெக்டர்கள்

$$\mathbf{l}_\rho=\frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right|}=\frac{\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j}}{\sqrt{\cos^2\phi+\sin^2\phi}}=\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j}$$

$$\mathbf{l}_\phi=\frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right|}=\frac{-\rho\sin\phi\mathbf{i}+\rho\cos\phi\mathbf{j}}{\sqrt{\rho^2\sin^2\phi+\rho^2\cos\phi}}=-\sin\phi\mathbf{i}+\cos\phi\mathbf{j}$$

$$\mathbf{l}_z=\frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right|}=\mathbf{K}$$ ஆகின்றன.

எனவே,

$$\mathbf{l}_\rho\cdot\mathbf{l}_\phi=(\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j})(-\sin\phi\mathbf{i}+\cos\phi\mathbf{j})=O$$

$$\mathbf{l}_\phi\cdot\mathbf{l}_z=(-\sin\phi\mathbf{i}+\cos\phi\mathbf{j}).\mathbf{K}=O$$

$$\mathbf{l}_z\cdot\mathbf{l}_\rho=\mathbf{K}.(\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j})=O$$

எனவே 1_ρ, 1_ϕ, 1_z என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. ஆகவே உருளை இலக்கெண் அமைப்பு ஒரு செங்கோண அமைப்பு ஆகும்.

8 (b). கோளத்துருவ இலக்கெண்கள் (r, θ, ϕ) **(Spherical Polar Co-ordinates):** இவ்வமைப்பில் $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் (r, θ, ϕ) என்ற கோளத்துருவ இலக்கெண்கள் பின்வரும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றன :

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

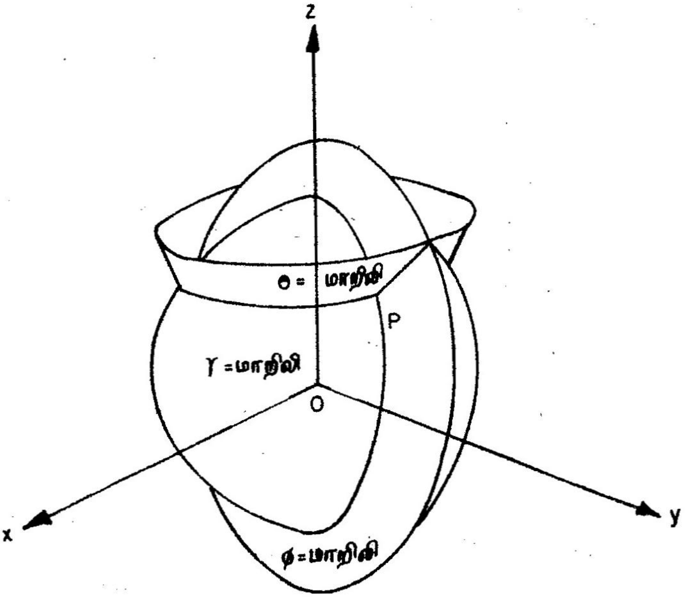
இங்கே $r \geqslant o$, $o \leqslant \phi \leqslant 2\pi$, $o \leqslant \theta \leqslant \pi$.

இவ்வமைப்பில் இலக்குத்தளங்கள் பின்வருமாறு :

$r = c_1$ என்பது ஆதியை மையமாக உடைய ஒரு கோளம்.

$\theta = c_2$ என்பது ஆதியில் உச்சியும், z அச்சு, மைய அச்சாகவும் உள்ள கூம்பு

$\phi = c_3$ என்பது z அச்சின் வழிச்செல்லும் சமதளம்.



இலக்கு வளைவுகள் பின்வருமாறு

$r=c_1$, $\theta=c_2$ என்பது ஒரு வட்டம்—ϕ வளைவு

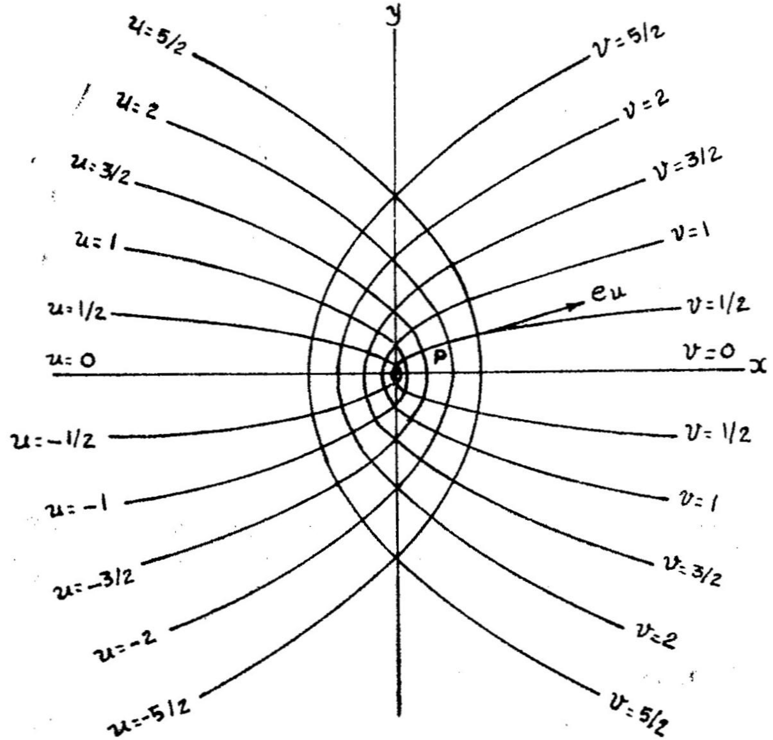
$r=c_1$, $\phi=c_3$ என்பது ஓர் அரை வட்டம்—θ வளைவு

$\theta=c_2$, $\phi=c_3$ என்பது ஒரு நேர்கோடு—r வளைவு

8 (c). **பரவளைய உருளை இலக்கெண்கள்** (u, v, z) (Parabolic Cylindrical Coordinates): இவ்வமைப்பில் $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் (u, v, z) என்ற பரவளைய உருளை இலக்கெண்கள் பின்வரும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றன :

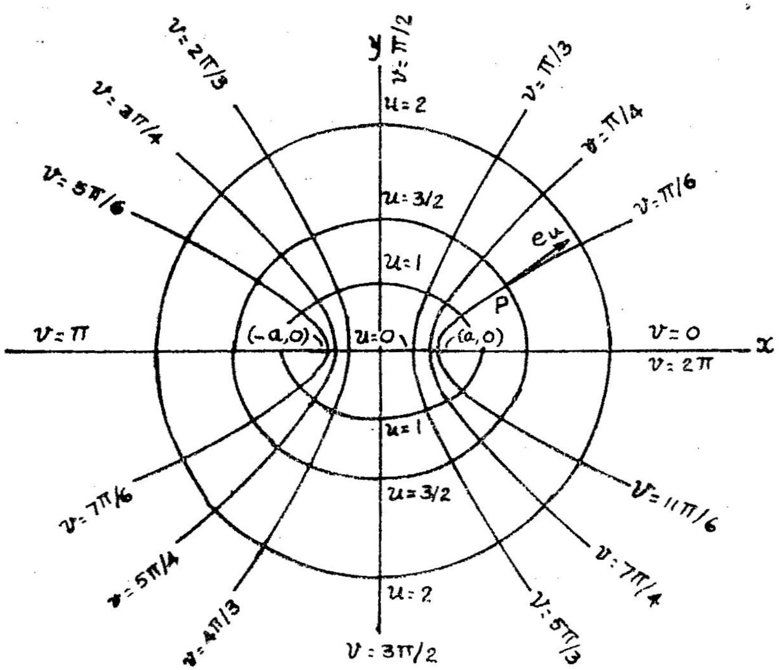
$$x=\frac{1}{2}(u^2-v^2),\ y=uv,\ z=z$$

இங்கே $-\infty < u < \infty,\ v \geqslant 0,\ -\infty < z < \infty$



xy தளத்தில், இவ்வமைப்பின் இலக்குத்தளங்களின் சுவடுகள் (traces) படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அச்சுவடுகள் பொது அச்சையுடைய பரவளையங்கள் ஆகும்.

8 (d). **நீள்வட்ட உருளை இலக்கெண்கள்** (u, v, z) (Elliptical Cylindrical Co-ordinates): $x = a \cos h\, u \cos v$, $y = a \sin hu \sin v$, $z = z$ எனில் (u, v, z) என்பன $P\ (x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் நீள்வட்ட உருளை இலக்கெண்கள் ஆகும். இங்கே $u \geqslant 0, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi, -\infty < z < \infty$.



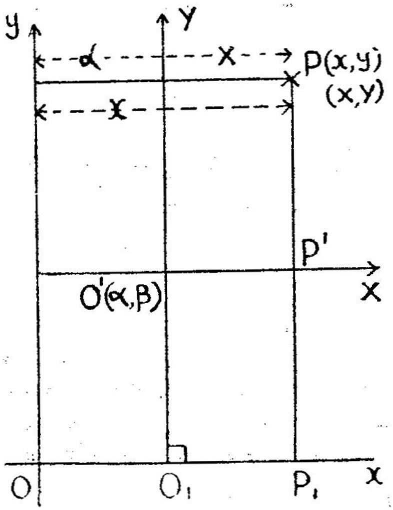
xy-தளத்தில் இலக்குத் தளங்களின் அடிச்சுவடுகள் படத்தில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகள் பொதுக்குவிய நீள்வட்டங்களும் அதிபர வளைவுகளும் ஆகும்.

9. அச்சுகளின் நிலைமாற்றம் (Transformation of Co-ordinates)

ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்கள் குறிப்பிடுவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட அச்சுத்தொகுதியினால் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. அந்த அச்சுத்தொகுதி மாற்றப்பட்டால் புள்ளியின் இலக்கெண்களும் பொருத்தமாக மாறுகின்றன. இரு வேறு அச்சுத் தொகுதிகளினால் குறிக்கப்படுகின்ற ஒரே புள்ளியின் இலக்கெண்கள் ஒன்றுக்

கொன்று தொடர்புடையவை. இவ்வாறு இருவேறு அமைப்புகளின் இலக்கெண்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்புகள் அச்சுகளின் நிலைமாற்றத்தைத் தீர்மானிக்கும் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

9 (a). ஒரு சமதளத்தில் இடப்பெயர்ச்சி (Translation in a plane)



(x, y) என்பன $ox—oy$ என்ற அச்சு அமைப்பால் உறுதி செய்யப்பட்ட P என்ற புள்ளியின் இலக்கெண்கள்.

O' (α, β) என்ற புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றுவோம். $O'X$, $O'Y$. என்ற புது அச்சுகள் ox, oy-க்கு இணையாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

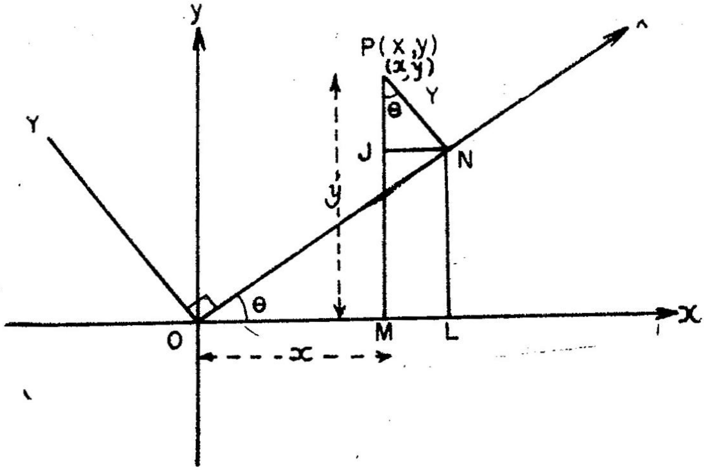
இப்பொழுது (X, Y) என்பன புது அச்சு அமைப்பால் உறுதி செய்யப்பட்ட, Pன் இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும்.

அவ்வாறாயின்

$$x = X + \alpha, \; y = Y + \beta$$

இந்தச் சமன்பாடுகள் அச்சுகளின் இடப்பெயர்ச்சியினால் ஏற்பட்ட இலக்கெண்களின் நிலைமாற்றத்தைக் குறிக்கின்றன.

9 (b). ஒரு சமதளத்தில் சுழற்சி (Rotation in a plane)



(x, y) என்பன ox, oy என்ற அச்சு அமைப்புகளோடு தொடர்புள்ள P என்ற புள்ளியின் இலக்கெண்கள். இப்பொழுது ox—oy என்ற அச்சுகள் θ என்ற கோண அளவு சுழலட்டும். OX—OY என்பன அந்த அச்சுகளின் புது நிலைகளாகட்டும்.

அவ்வாறாயின்

$$x = OM = OL - ML$$
$$= OL - JN = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = PJ + JM = PJ + NL$$
$$= Y\cos\theta + X\sin\theta$$

அதாவது

$$X = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$Y = y\cos\theta - x\sin\theta$$

இந்தச் சமன்பாடுகள் அச்சுகளின் சுழற்சியினால் ஏற்பட்ட இலக்கெண்களின் நிலைமாற்றத்தைக் குறிக்கின்றன.

இவற்றை அணி (Matrix) அமைப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி

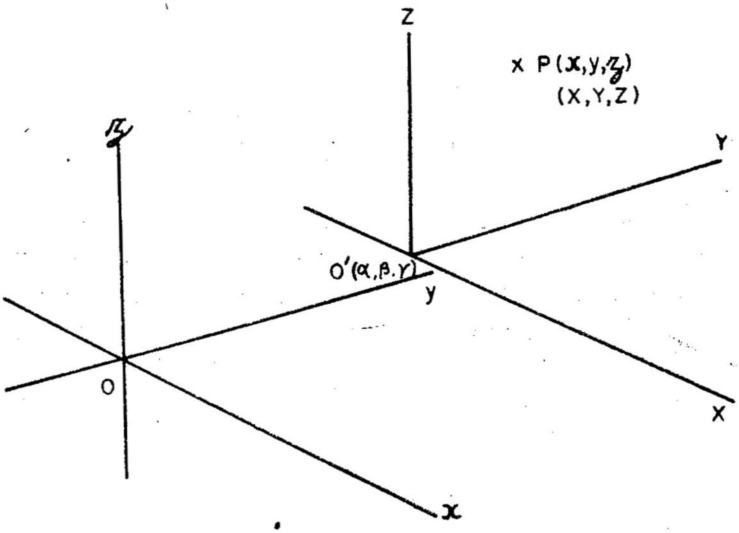
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

என்றும் குறிக்கலாம்

குறிப்பு : மேலே குறிப்பிடப்பட்ட இரண்டு வகை அச்சு மாற்றங்களையும் ஒன்றன்பின் ஒன்ருகச் செய்வதாகக் கொண்டால், அதாவது O' என்ற புள்ளிக்கு ஆதியை இடம் பெயர்த்துப் பின் அச்சுகளைச் சுழலவிட்டால் நமக்கு ஒரு புது மாற்றம் கிடைக்கிறது. சமதளத்தில் செய்யப்படும் சில்வகை அச்சு நிலை மாற்றங்களை மேற்குறிப்பிட்ட மாற்றங்களின் கூட்டுப் பயனுகக் கொள்ளலாம்.

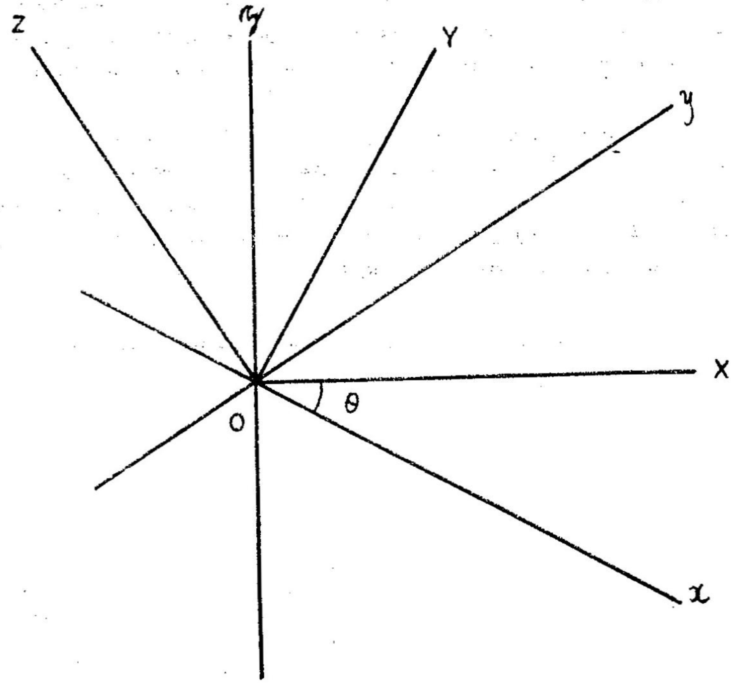
9 (c). ஒரு வெளியில் இடப்பெயர்ச்சி (Translation in a Space) : இதே போன்று ஒரு வெளியில் $o—xyz$ என்ற அச்சுகளால் உறுதி செய்யப்பட்ட $P\ (x, y, z)$ என்ற புள்ளியின் இலக்கெண் கள், $O'\ (\alpha, \beta, \gamma)$க்கு இடப்பெயர்ச்சி செய்வதால் (X, Y, Z) என்று மாறிஞல், அவற்றினிடையே உள்ள தொடர்புகள்

$x=X+\alpha,\ y=Y+\beta,\ z=Z+\gamma$ என்ற சமன்பாடுகளால் தரப் படுகின்றன.



9 (d). ஒரு வெளியில் சுழற்சி (Rotation in Space): Ox, Oy, Oz என்பன அச்சுகளின் ஆரம்ப நிலைகளாகக் கொள்க. அவை சுழன்றபின் $OX,\ OY,\ OZ$ என்ற நிலைகளில் நிற்கின்றன. (x, y, z) என்பன $Ox,\ Oy,\ Oz$ என்பனவற்றோடு தொடர்

புள்ள P என்ற புள்ளியின் இலக்கெண்கள். ox, oy, oz தொடர்பு படுத்தும்போது (X, Y, Z) என்பன அதே புள்ளியின் இலக்கெண்கள் என்க.



(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) என்பன முறையே Ox, Oy, Oz என்ற அச்சுகளைப் பொறுத்து OX, OY, OZ என்பனவற்றின் திசைக் கொசைன்களாக (Direction Cosines) இருக்கட்டும்.

அவ்வாறுயின் இலக்கெண்களின் நிலைமாற்றத் தொடர்பு பின்வரும் அணிச் சமன்பாட்டால் தரப்படும்.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

குறிப்பு: 1. ஒரு வெளியினில் ஏற்படும் சிலவகை அச்சு மாற்றங்களை மேற்குறிப்பிடப்பட்ட இரு மாற்றங்களின் கூட்டுப் பயனுகக் கருதலாம்.

2. இனி அச்சுகளின் நிலைமாற்றத்தால் ஏற்படும் இலக்கெண்களின் மாற்றத்தை, இலக்கெண்களின் நிலைமாற்றம் என்றே குறிப்பிடுவோமாக.

9 (e). பொது நிலைமாற்றம் (General transformation) : (x, y, z)-ம் (x, y, z)-ம் இருவேறு அச்சு அமைப்புகளில், ஒரேபுள்ளியின் இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும். அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு

$$x=f_1(x, y, z),\ y=f_2(x, y, z),\ z=f_3(x, y, z)$$

(9.1) என்ற சமன்பாடுகளால் தரப்படட்டும்.

9.1-ல் இருந்து x, y, z இவற்றிற்குத் தீர்வு காண்போமானல்

$$X=g_1(x, y, z),\ Y=g_2(x, y z),\ Z=g_3(x, y, z) \tag{9.2}$$

என்ற தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

சமன்பாடுகள் 9.1, 9.2 இவை ஒரு பொது நிலைமாற்றத்தைக் குறிக்கின்றன.

குறிப்பு : 1. நூற்பிரிவு 8ல் சொல்லப்பட்ட இலக்கெண் அமைப்புகள் மேலே குறிப்பிடப்பட்ட பொதுமாற்றத்தின் சில தனிப்பட்ட வகைகளே.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$x=\rho \operatorname{Cos} \phi,\ y=\rho \operatorname{Sin} \phi,\ z=z$$

என்ற சமன்பாடுகள் (x, y, z) இருந்து (ρ, ϕ, z) க்கு மாற்றப் பட்ட பொது மாற்றத்தின் ஒரு தனிப்பட்ட வகையே.

ஒரு பொது மாற்றத்தில், ஓர் இலக்கெண் அமைப்பிலிருந்து மற்றொன்றிற்கு மாறும்பொழுது இலக்கெண்களிடையே ஒன்றுக் கொன்று ஒத்திசைவு (one to one Correspondence) இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக, உருளை இலக்கெண்கள் (ρ, ϕ, z) க்கு தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் (x, y, z) இருந்து மாறுகின்ற மாற்றத்தைக் கவனிப்போம். இதில் $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $z=z$.

இம்மாற்றத்தில் (O, o, z) என்ற தெக்காட்டின் இலக்கெண் களுக்கு தொடர்புடைய (ρ, ϕ, z) இலக்கெண்கள் கிடையா. ஏனெனில் $x=o$, $y=o$ ஆக உள்ளபோது ϕ என்பது தேரா எண்ணுகின்றது (Indeterminate). நிலைமாற்றப் பட்ட அமைப்பில் ஒத்திசைவான இலக்கெண்கள் இல்லாவிடில் அம்மாற்றத்திற்கு அப்புள்ளியை இடர்ப்புள்ளி (Critical point) அல்லது அருநிலைப்புள்ளி

(Singular point) என்று கூறுகிறோம். எனவே (O, O, Z) என்ற புள்ளிகள் யாவும், மேற்சொன்ன மாற்றத்திற்கு இடர்ப்புள்ளிகளாம்.

10. N-பரிமாண வெளி (N-Dimensional Space)

ஒரு-பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியின் அமைநிலையை ஒரு தனி எண்ணால் குறிக்கிறோம். 2 அல்லது 3 பரிமாண வெளிகளில் முறையே 2 அல்லது 3 முறைப்படுத்தப்பட்ட எண்களால் புள்ளியின் அமைநிலையைக் குறிக்கிறோம். இதையே சற்று நீட்டி ஒரு N-பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியின் அமைநிலையை $(x_1, x_2 \ldots\ldots x_N)$ என்று முறைப்படுத்தப்பட்ட N எண்களால் குறிக்கலாம். $x_1, x_2, \ldots\ldots x_N$ என்பனவற்றை அப்புள்ளியின் இலக்கெண்கள் என்கிறோம். இவ்வாறு குறிக்கப்படும் புள்ளிகளின் கூட்டத்தை N-பரிமாண வெளியாகக் கொள்கிறோம். அந்த வெளியை V_N என்ற குறியீட்டினால் குறிப்பிடுகிறோம். ஒரு N-பரிமாண வெளியை ஒரு மாவிரி வெளி (hyper space) என்றும் பல்லுரு வெளி (manifold) என்றும் அழைக்கிறோம்.

இலக்கெண்களின் எண்ணிக்கை மூன்றிற்கு மேற்படும் போது வெளியினை கற்பனை செய்வது மிகவும் சிக்கலானது. ஆனாலும் மூன்றிற்கு மேற்பட்ட முறைப்படுத்தப்பட்ட எண் தொகைகளின் கூட்டத்திற்கும், ஒரு பொருட் கூட்டத்தின் பண்புத் தொகைகளுக்கும் ஒன்றுக்கொன்று ஒத்திசைவு காண வேண்டிய நிலை பல சமயங்களில் நேரிடுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வாயுவின் நிலை அதன் அழுத்தம் (p) கன அளவு (v), வெப்பநிலை (T), காலம் (t) என்ற நான்கினால் தீர்மானிக்கப்படுகிறது,

இந்த நான்கின் அளவுகளையும் நான்கு முறைப்படுத்தப்பட்ட (p, v, T, t) என்ற எண்களால் குறிக்கலாம். இவ்வாறு குறிக்கப்பட்ட எண் தொகையை நாற்பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்களாக் கொள்ளலாம். ஒரு வாயுவின் நிலையை நமது சாதாரண முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியினால் குறிக்க முடியாது என்பது மறுக்க முடியாத உண்மை. இலக்கெண் அமைப்பின் அடிப்படைக்கொள்கை படத்தினால் குறிப்பதன்று என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். அதன் அடிப்படைக் கொள்கை பொருள்களுக்கும், இலக்கெண் தொகைகளுக்கும் உள்ள ஒன்றுக் கொன்றான ஒத்திசைவே. எனவேதான் மூன்றிற்கு மேற்பட்ட பரிமாணங்களின் தன்மைகளை ஆராயமுற்படும்போது இந்த ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்திசைவை அடிப்படைக் கொள்கையாகக் கொண்டு இலக்கெண் அமைப்பு முறையை உருவாக்குகிறோம்.

அடுத்து N-பரிமாணவெளி V_Nல் ஒரு வளைவு கோட்டினை எப்படி வரையறை செய்வது என்று பார்ப்போம். இருபரிமாண வெளியில் u வை ஒட்டளவாகக் (Parameter) கொண்டு $x=f_1(u)$, $y=f_2(u)$ என்று எழுதினால், அந்தச் சமன்பாடுகள் ஒரு வளைவு கோட்டைக் குறிக்கின்றன. இவ்வாறே u வை ஒட்டளவாகக் கொண்டு $x=f_1(u)$, $y=f_2(u)$, $z=f_3(u)$ என்ற சமன்பாடுகளால் முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வளைவு கோட்டை குறிக்கலாம் இதையே நீட்டி, u வை ஒட்டளவாகக்கொண்டு $x=f_i(u)$ $(i=1, 2, 3, \ldots\ldots N)$ என்ற N சமன்பாடுகளால் தரப்படும் புள்ளி களின் கூட்டத்தை N-பரிமாண வெளியில் வளைவுகோடாக வரை யறை செய்கிறோம். அவற்றிற்கு எவ்வளவு அடைவு (order) வரை தேவையோ அதுவரை வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன என்றும் கொள்கிறோம்.

$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_M$ என்ற M ஒட்டளவைகளைக் கொண்டு $(M<N)$

$x_i = f_i(u_1, u_2, \ldots\ldots u_M)$ என்ற $(i=1, 2, 3 \ldots\ldots N)$

N சமன்பாடுகளால் தரப்படும் புள்ளிகளின் கூட்டத்தை V_M என்ற கீழ்வெளி (Sub-space) என்று அழைக்கிறோம்.

$M=N-1$ ஆக இருக்கும் போது உள்ள கீழ்வெளியை மாவிரித் தளம் (Hyper surface) என அழைக்கிறோம். ஒரு மாவிரித் தளத்தை வரையறை செய்யும் ஒட்டளவைகளின் எண்ணிக்கைச் சமன்பாடு களின் எண்ணிக்கையைவிட ஒன்று குறைவாக உள்ளதால் சமன் பாடுகளைப் பயன்படுத்தி ஒட்டளவைகளை நீக்கிவிடமுடியும். அவ்வாறு நீக்கினால்

$F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_N)=0$ என்ற ஒரே சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதுவே மாவிரித்தளத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

எடுத்துக் காட்டு: ஒரு N-பரிமாண வெளி V_N-ல் ஒரு மாவிரித் தளத்தின் ஒட்டளவைக் குறிப்பு பின்வருமாறு

$x_1 = a \cos u_1$

$x_2 = a \sin u_1 \cos u_2$

$x_3 = a \sin u_1 \sin u_2 \cos u_3$

....

....

$x_{N-1} = a \sin u_1 \sin u_2 \ldots\ldots\ldots \sin u_{N-2} \cos u_{N-1}$

$x_N = a \sin u_1 \sin u_2 \ldots\ldots\ldots \sin u_{N-1}$

u-க்களை நீக்க,

$x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_N^2=a^2$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இது ஆதியை மையமாகவும் a யை ஆரையாகவும் கொண்ட மாவிரிகோளம் (Hypersphere) ஆகும்.

11. V_N-ல் இலக்கெண்களின் நிலைமாற்றம்.

$(x_1, x_2, x_3\ldots\ldots x_N)$-ம் $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\ldots x\ )$-ம் இருவேறு அச்சு அமைப்புகளில் ஒரே புள்ளியின் இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும். மேலும் இவ்விரு இலக்கெண் அமைப்புகளுக்கிடையே

$$\overline{x_i}=f_i(x_1, x_2, x_3,\ldots x_N) \qquad \ldots\ldots(11.1)$$

$$(i=1, 2, 3,\ldots N)$$

ஆல் கொடுக்கப்பட்ட சார்பிலா (independent) N தொடர்புகள் உள்ளன என்றும் கொள்வோம். இங்கு f_i என்பன ஒரு மதிப்புடைய தொடர்ச்சியும், தொடர்ச்சியான வகைக்கெழுக்களுமுடைய சார்புகள்.

இப்பொழுது பகுதி வகைக்கெழுக்களால் அமைக்கப்பட்ட யாக்கோப்பின் அணிக்கோவை

$$\left|\frac{\partial\,(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}\ \ldots\ldots x_N)}{\partial\,(x_1, x_2, x_3,\ldots\ldots x_N}\right|$$

பூச்சியமில்லாதிருந்தால் x-களை, $\overline{x}$-கள் மூலமாக எழுதலாம் அதாவது

$$x_K=g_K\ (\overline{x_1}, \overline{x_2}\ldots\ldots \overline{x_N}) \qquad \ldots\ldots(11.2)$$

$$(K=1, 2, 2\cdot 3\ldots\ldots N)$$

என்று கொள்க.

தொடர்புகள் 11.1 அல்லது 11.2 ஓர் அச்சு அமைப்பிலிருந்து மற்றொன்றிற்கு மாற்றுவதனல் நிகழும் **இலெக்கண்களின் நிலைமாற்றத்தை** (transformation of Coordinates) வரையறை செய்கின்றன.

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்ட அமைப்புகள் செங்கோண அமைப்புகள் எனநிரூபி.
   (i) கோளத்துருவ இலக்கெண் அமைப்பு,
   (ii) பரவளைய உருளை இலக்கெண் அமைப்பு.

2. தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பிலிருந்து கோளத்துருவ அமைப்புக்கு மாற்றும்பொழுது இடர்ப்புள்ளிகள் உள்ளனவா ? இருப்பின் அவை யாவை ?

2. நேர் கோட்டிய வெக்டர் வெளிகள்
(Linear Vector Spaces)

12. " தூரம் " என்னும் கருத்து

ஒரு முப்பரிமாண வெளியில் (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) என்ற தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் உடைய புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் d, பின்வரும் பைதாகரசின் (Pythagoras) விதிமுறையால் தரப்படுகின்றது,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

இலக்கெண் அமைப்பு முறை சரிவு அமைப்பாயின் மேற்கூறிய விதிமுறை சற்று சிக்கலான உருவத்தைப் பெறுகின்றது, இனி இந்த விதிமுறையை N-பரிமாண வெளிக்குப் பொதுவாக்கி வரையறை செய்வோம். $(x_1, x_2 \ldots\ldots x_N)$, $(y_1, y_2 \ldots\ldots y_N)$ என்பன இரண்டு புள்ளிகளின் செவ்வகச் செங்கோண இலக்கெண்களாயின் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தூரத்தை பின்வரும் விதிமுறையால் வரையறை செய்கின்றோம்.

$$d = \sqrt{\sum_1^N (x_i - y_i)} \qquad \ldots\ldots(12.1)$$

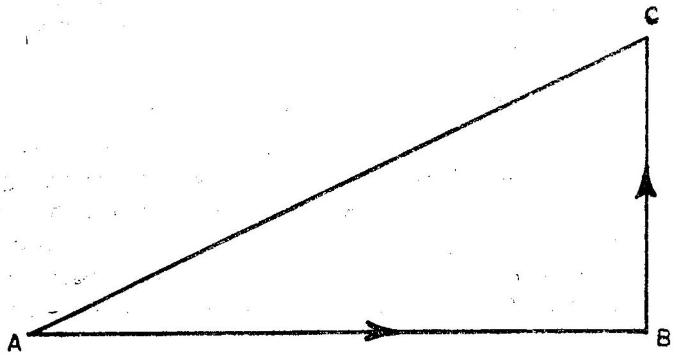
எனவே N-பரிமாண வெளியில் தூரம் என்னும் கருத்து 12.1-ஆல் தரப்படுகின்றது.

இனி ஒருவெளியினில் ஓர் அலகுத்தூரம் இருந்து அந்த அலகின் உதவியால் அந்த வெளியினை அளக்க முடியுமாஞல் அந்த வெளி ஓர் அளவையைப் (metric) பெற்ற வெளி என்று சொல்கிறோம் இயல்பியல் சிக்கல்களைப் பகுமுறை (analytic) ஆய்வு செய்யுங்கால் நாம் காணும் வெளிகள் யாவும் "அளவை"யைப் பெற்றிருத்தல் அவசியமன்று. எடுத்துக்காட்டாக அழுத்தம் (p), கன அளவு (v) ஆகியவைகளால் கொடுக்கப்படும் ஒரு வாயுவின் நிலைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். (p, v) என்ற இலக்கெண்களை ஒரு தெக்காட்டின்

தளத்தில் புள்ளிகள் மூலம் குறிப்பிடுகின்றோம். இதன்மூலம் நமக்கு p-v தளம் என்ற வெளி கிடைக்கின்றது. ஆனால் இந்த வெளியினில் **'தூரம்'** என்பதை வடிவகணிதப் பொருளில் வரையறை செய்ய முடியாது. ஒரு வாயுவின் இரு நிலைகளுக்கிடையே உள்ள "தூரம்" என்பது பொருளற்றது. எனவே நமது பகுமுறை ஆய்வுகளில் வெளிகள் 'அளவை' பெற்றவையாகவோ அல்லது பெறாதவையாகவோ இருக்கலாம்.

13. வெக்டர்—வடிவகணிதக் கருத்துகள்

ஓர் 'அளவை'யுடைய வெளியினை எடுத்துக்கொள்வோம். இவ்வெளியில் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே "தூரம்" என்னும் இடைவெளியுள்ளது. இம்மாதிரி வெளிகளில் இடப்பெயர்ச்சி என்பது அடிப்படைக் கருத்துகளில் ஒன்று.



எனவே ஒரு புள்ளி A என்ற அமைநிலையிலிருந்து B என்ற அமைநிலைக்கு இடம் பெயருகின்றது என்று கொள்க. இவ்விடப்பெயர்ச்சியை $\overrightarrow{AB}$ என்ற திசையுடன் கூடிய நேர்கோட்டுத் துண்டால் குறிக்கலாம். இதனை வெக்டர் AB எனக் கூறுகிறோம்.

அடுத்து, புள்ளி B என்ற அமைநிலையிலிருந்து C என்ற புது நிலைக்கு இடம் பெயருமானால் அதனால் விளைந்த விளைவு இடப்பெயர்ச்சி **(Resultant displacement)** புள்ளி A லிருந்து C க்கு நேராக இடம் பெயருவதற்குச் சமம்; இதனையே

$\overline{AB}+\overline{BC}=AC$ என்று குறியீட்டுகளின் மூலம் குறிக்கலாம்.

வெக்டர் விளக்க நூல்களில் வெக்டர்களை தடித்த எழுத்தில் அச்சிடப்பட்ட தனி எழுத்துக்களால் குறிப்பது வழக்கம். எனவே

$\overline{AB}=\mathbf{a}$ $\overline{BC}=\mathbf{b}$ $\overline{AC}=\mathbf{c}$ ஆனல் மேலேயுள்ள சமன்பாட்டை

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c} \qquad \ldots\ldots(13.1)$$

என்றும் எழுதலாம்.

வெக்டர் என்பதின் வரையறையிலிருந்தே, நீளங்கள் சமமாகவும், திசைகள் இணையாகவும் உள்ள இரண்டு வெக்டர்கள் சமம் என்பது தெளிவு.

வெக்டர் **a**-ன் நீளம் $|\mathbf{a}|$ ஆல் குறிக்கப்படும் **a**-ன் எதிர் வெக்டரை $-\mathbf{a}$ ஆல் குறிக்கிறோம். $-\mathbf{a}$ என்பது **a** ப்போன்ற நீளம் உடையது ஆனல் அதன் எதிர்த்திசையை நோக்கியுள்ளது.

$\overline{AA}$ என்ற வெக்டரை பூச்சிய வெக்டர் (zero vector) என்று அழைக்கிறோம். அதை **0** என்ற குறியீட்டினல் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0} \qquad \ldots\ldots(13.2)$$

என்பது தெளிவு.

வெக்டரின் வடிவகணிதப் பண்புகளிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவுகளை எளிதில் பெறலாம்.

(i) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ ......(13.3)

(ii) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ ......(13.4)

(iii) **a**, **b** என்பன இரு வெக்டர்களானல்

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}+\times \qquad \ldots\ldots(13.5)$$

என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படும் $\times$ என்னும் தன்னேரில்லாத வெக்டர் ஒன்று உண்டு.

அடுத்து, α என்பது ஒரு மெய் எண் (real no.) என்றால் $\alpha\,\mathbf{a}$ என்பது ஒரு வெக்டர்; அதன் நீளம் வெக்டர் **a** யைப் போன்று $|\alpha|$ மடங்கு. α மிகை எண்ணையின் **a**, $\alpha\,\mathbf{a}$ இரண்டும் ஒரே திசையின; α குறை எண்ணையின் அவை எதிர்த்திசையின. $\alpha=0$ எனின் $\alpha\,\mathbf{a}=\mathbf{0}$

மேற்சொன்ன வெக்டரின் மெய்யெண் பெருக்குத் தொகை வரையறையிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவுகளை எளிதில் அடையலாம்.

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ என்பன மெய்யெண்களாயின்

(i) $\alpha\, \mathbf{a} = \mathbf{a}\, \alpha,\ 1\, \mathbf{a} = \mathbf{a}$ ......(13.6)

(ii) $(\alpha_1 + \alpha_2)\, \mathbf{a} = \alpha_1\, \mathbf{a} + \alpha_2\, \mathbf{a}$ ......(13.7)

(iii) $\alpha\, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\, \mathbf{a} + \alpha\, \mathbf{b}$ ......(13.8)

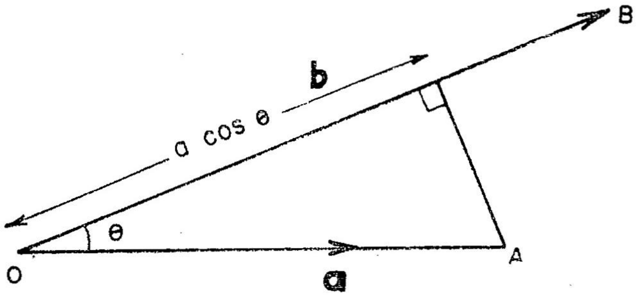
(iv) $\alpha_1\, (\alpha_2\, \mathbf{a}) = (\alpha_1\, \alpha_2)\, \mathbf{a}$ ......(13.9)

அடுத்து இரு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கற்பலனை (Dot Product) எடுத்துக்கொள்வோம். இதனை அளவிப் பெருக்கற்பலன் (Scalar Product) என்றும் குறிப்பிடுகிறேம். **a, b** என்பன இருவெக்டர் களாஞல் அவற்றின் புள்ளிப் பெருக்கற்பலன் **a·b** பின்வரும்

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad ......(13.10)$$

என்ற சமன்பாட்டால் வரையறை செய்யப்படுகிறது. இதில் cos (**a, b**) என்பது **a, b** இவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணத்தின் கொசைன் விகிதம்.

a.b என்பதின் வரைகணித விளக்கம் காண்போமாஞல் அதன் மதிப்பு **b**-ன் மேல் **a**-ன் வீச்சைப் (Projection) போல் | **b** | மடங்கு



ஆகும்; எனவே $+\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$ என்பது **a**-ன் நீளமாகும்.

a, b என்ற வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால் **a·b** = 0, மறுதலையாக **a.b** = 0 ஆயின் **a,b** என்பன செங் குத்து வெக்டர்கள் என்பது வரையறையிலிருந்தே தெளிவு,

மேலும் புள்ளி பெருக்கற்பலனின் வரையறையிலிருந்து கீழ்க் கண்ட முடிவுகளை எளிதில் பெறலாம்.

(i) **a** = 0 ஆக இல்லாவிடின்

$$\mathbf{a}.\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 > 0 \qquad ......(13.11)$$

(ii) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$ ......(13.12)

(iii) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$ ......(13.13)

(iv) $\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\alpha\ \mathbf{a}.\mathbf{b},)$ இங்கு α என்பது மெய்யெண் ......(13.14)

14. நேர்கோட்டிய வெக்டர் வெளிகள்

வரையறை : $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \ldots\ldots \mathbf{a}_N$ என்ற N வெக்டர்களின் தொகுதி யொன்றினை எடுத்துக்கொள்வோம். $\mathbf{a}_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \mathbf{a}_N$ என்ற மெய்யெண்களில் குறைந்தது ஒன்ருவது பூச்சியமில்லா திருந்து $\alpha_1\ \mathbf{a}_1+\alpha_2\ \mathbf{a}_2+\alpha_3\ \mathbf{a}_3+\ldots\ldots\alpha_N\ \mathbf{a}_N=0$ ......(14.1) ஆக இருந்தால் அந்த n வெக்டர்களை **நேர்கோட்டுச் சார்புடைத்தன (linearly dependent)** என்று வரையறுக்கிறேம்.

சமன்பாடு 14.1, $\alpha_1=\alpha_2\ldots=\alpha_N=o$ ஆக இருக்கும்போது மட்டுமே உண்மையாக இருக்குமாஞல் அந்த n வெக்டர்களை **நேர் கோட்டுச் சார்பிலாதன (linearly independent)** என்று சொல்கிறேம்.

இனி, ஒரே திசையையோ அல்லது எதிரெதிர்த்திசைகளையோ நோக்கியுள்ள $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ என்ற இரு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பொழுது

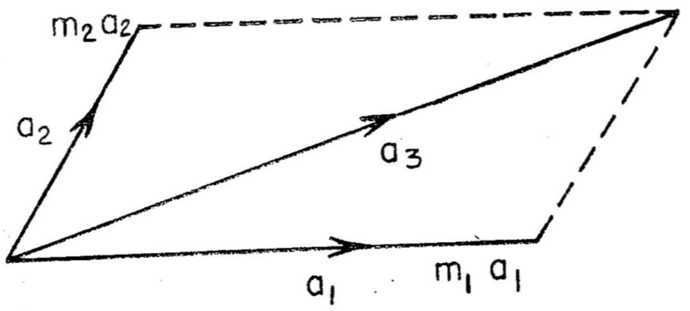
$$\mathbf{a}_2=k\mathbf{a}_1 \quad (k\neq o)$$

என்று இவ்விரு வெக்டர்களையும் தொடர்புபடுத்தி எழுதலாம். இந்தச் சமன்பாட்டில் $k=-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ என்று பிரதியிடுவோமாஞல்

$\alpha_1\ \mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$ என்று கிடைக்கிறது. எனவே இணைத்திசை களில் உள்ள இரண்டு வெக்டர்கள் எப்பொழுதும் நேர்கோட்டுச் சார்புடைத்தன.

$\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ ஆக இருந்து, K ஏதோ ஒரு மெய்யெண்ணுக இருந்தால், Kன் பல மதிப்புக்களுக்கு $K\ \mathbf{a}$ ஒரு வெக்டர் கூட்டத்தை வரையறை செய்கிறது. அவ்வாறு வரையறை செய்யப்பட்ட வெக்டர் கூட்டத்தை **ஒருபரிமாண நேர்கோட்டிய வெக்டர் வெளி** என்கிறேம்.

அடுத்து, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ என்பன O என்ற பொது ஆதியை உடைய இரு வெக்டர்களாக இருக்கட்டும்.



$\mathbf{a}_3$ என்பது இவ்விரு வெக்டர்களின் தளத்தில் உள்ள மற்ருெரு வெக்டராளுல் $\mathbf{a}_3$ யை $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ இவற்றின் உதவி கொண்டு பின் வருமாறு குறிக்கலாம் :

$$\mathbf{a}_3 = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2$$

(இங்கே m_1, m_2 என்பன மெய்யெண்கள்)

$$m_1 = -\frac{a_1}{a_3}, m_2 = -\frac{a_2}{a_3} \text{ என்றிடுவோமாளுல்}$$

$$a_1 \mathbf{a}_1 + a_2 \mathbf{a}_2 + a_3 \mathbf{a}_3 = 0 \qquad \ldots\ldots(14.2)$$

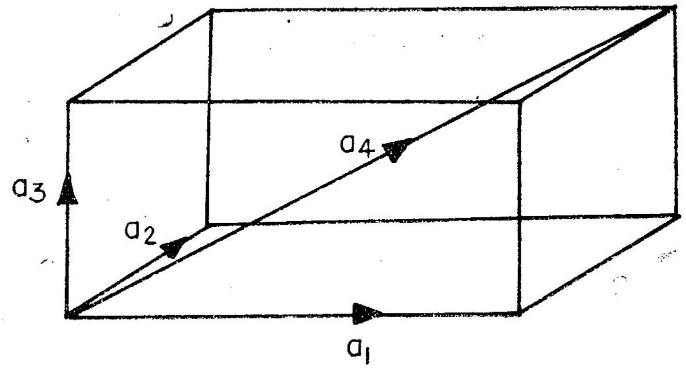
என்று கிடைக்கின்றது.

மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண்ணுவது பூச்சியமில்லாது இருக்கும் ஆதலால், ஒரு சமதளத்தில் எந்த மூன்று வெக்டர்களே எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை நேர் கோட்டுச் சார்புடைத்தன. இத்தளத்தில்

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0$$

என்ற சமன்பாடு $m_1 = m_2 = 0$ ஆக இருக்கும்போது மட்டுமே உண்மை. எனவே வெக்டர்கள் $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ இரண்டும் நேர்கோட்டுச் சார்பிலாதன. இனி, $m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2$ என்ற கோவை m_1, m_2 பல மதிப்புகளே ஏற்றுக்கொள்ளும்போது தளத்தில் உள்ள எல்லா வெக்டர்களேயும் குறிக்கின்றது. எனவே அது ஓர் **இரு-பரிமாண நேர் கோட்டிய வெக்டர் வெளியினே** வரையறை செய்கின்றது.

இனி, ஒரு முப்புரிமாணவெளியில் ஒரே தளத்தில் இல்லாதவை யும் ஆளுல் ஒரே ஆதிஜய உடையவையும் ஆன $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்ற மூன்றும் வெக்டர்களே எடுத்துக்கொள்வோம்.



$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்ற இந்த வெக்டர்களைக் கொண்டு வெளியினில் உள்ள $\mathbf{a}_4$ என்ற எந்தவொரு வெக்டரையும்

$$\mathbf{a}_4 = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3 \qquad \ldots\ldots(14.3)$$

என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம். முன்போலவே

$m_1 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $m_2 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $m_3 = -\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4}$ என்று பிரதியிட

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 + \alpha_4 \mathbf{a}_4 = o \qquad \ldots\ldots(14.4)$$

என்றாகிறது. எனவே ஒரு முப்பரிமாண வெளியில் நான்கு வெக்டர்கள் நேர்கோட்டுச் சார்புடைத்தன.

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3 \qquad \ldots\ldots(14.5)$$

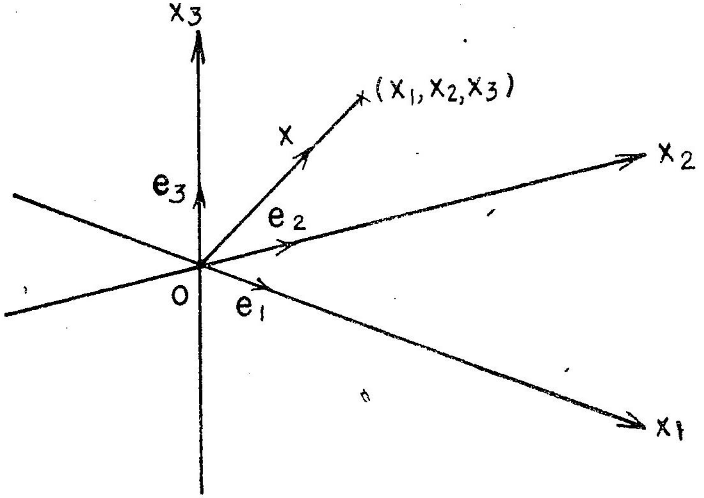
என்ற கோவை m_1, m_2, m_3 எல்லாவித மதிப்புகளையும் ஏற்கும் போது ஒரு முப்பரிமாண நேர்கோட்டிய வெக்டர் வெளியினை வரையறை செய்கின்றது.

வரையறை : 14.3 ல் கூறப்பட்ட $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்ற வெக்டர்கள் வெளியின் **அடிப்படை** (base) அல்லது **இலக்கு** (Coordinate) வெக்டர்கள் எனப்படும். m_1, m_2, m_3 என்ற மெய்யெண்கள் $\mathbf{a}_4$ வெக்டரின் **அளவு எண்கள்** (measure numbers) அல்லது **கூறுகள்** (Components) எனப்படும்.

எனவே, ஒரு தொகுதி அடிப்படை வெக்டர்கள் கொடுக்கப் பட்டால் அந்த வெளியில் எந்த ஒரு வெக்டரையும் மூன்று அளவு எண்கள் கொண்டு உறுதி செய்யலாம்.

ஒரு முப்பரிமாண வெளியில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று வெக்டர்கள், நேர்கோட்டுச் சார்பிலாதன என்பது

தெளிவு. இவ்வாருக ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான e_1, e_2, e_3 என்ற மூன்று அலகு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இவை சாதாரணமாக **i, j, k** எனக் குறிக்கப்படுகின்றன. e_1, e_2, e_3 என்பன வற்றை இலக்கு வெக்டர்களாகக் கொண்டு வெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டரையும் குறிக்கலாம். இந்த அடிப்படை வெக்டர் தொகுதியை செங்குத்தியல்புத் தொகுதி (orthonormal set) என்கிருேம்.



அடுத்து, **X** என்னும் வெக்டரை இவ்வெளியினில் எடுத்துக் கொள்வோம். அதை

$$\mathbf{X} = x_1\, \mathbf{e}_1 + x_2\, \mathbf{e}_2 + x_3\, \mathbf{e}_3 \qquad \ldots\ldots(14.6)$$

என்று குறிக்கலாம்.

$(x_1, x_2, x_3,)$ என்பனவற்றை **X** ன் இயல்பியல் கூறுகள் (Physical Components) என்று கூறுகிருேம். அடிப்படை அலகு வெக்டர் களின் முனைகளின் இலக்கெண்கள் பின்வருமாறு :

$\mathbf{e}_1 : (1,0,0)$

$\mathbf{e}_2 : (0,1,0)$

$\mathbf{e}_3 : (0,0,1)$

மேற்சொன்னதிலிருந்து

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_i . \mathbf{e}_j &= 0, \quad i \neq j \\ &= 1, \quad i = j \end{aligned}\right\} \text{ என்பது தெளிவு.} \qquad \ldots\ldots\ldots(14.7)$$

பின்வரும் முடிவுகளையும் எளிதில் நிரூபிக்கலாம்

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{X}=x_1\ \mathbf{e}_1+x_2\ \mathbf{e}_2+x_3\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{Y}=y_1\ \mathbf{e}_1+y_2\ \mathbf{e}_2+y_3\ \mathbf{e}_3\end{array}\right\} \qquad (14.8)$$

என்பன இரு வெக்டர்களானுல்,

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=(x_1+y_1)\ \mathbf{e}_1+(x_2+y_2)\ \mathbf{c}_2+(x_3+y_3)\mathbf{e}_3 \qquad ......(14.9)$$

$$\alpha\ \mathbf{X}=\alpha\ x_1\ \mathbf{e}_1+\alpha\ x_2\ \mathbf{e}_2+\alpha\ x_3\ \mathbf{e}_3 \qquad ......(14.10)$$

$$\mathbf{X.Y}=x_1\ y_1+x_2\ y_2+x_3\ y_3 \qquad ......(14.11)$$

$$|\ \mathbf{X}\ |^2=\mathbf{X.X}=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2 \qquad ......(14.12)$$

$x_1=x_2=x_3=o$ ஆக இன்றேல் $|\ \mathbf{X}\ |\ > o$ என்பது தெளிவு

15. N-பரிமாணத்தில் நேர்கோட்டிய வெக்டர் வெளி

இதுவரை வெக்டரைப் பற்றியும், அடிப்படை வெக்டர் தொகுதி ஒன்றினுல் அமைக்கப்படும். ஒரு, இரு, முப்பரிமாண வெக்டர் வெளிகள் பற்றியும் படித்தோம். இனி இதே கருத்துக் களை சற்று நீட்டி கற்பனையில் N பரிமாண வெக்டரையும், வெக்டர் வெளியினையும் வரையறை செய்வோம்.

N என்பது மூன்றைத் தாண்டிவிடின் 'நீளம்', 'தூரம்' என்ற கருத்துக்களுக்கு வழக்கமான பொருள் இருக்கமுடியாது. எனவே கருத்துக்களைப் பொதுவாக்கி, N-பரிமாணத்தில் அவற்றிற்கு வரையறைகள் மூலம் பொருள் விளக்கம் செய்கிறோம்.

N-பரிமாணத்தில் ஏதோவொரு இலக்கெண் அமைப்பை ஏற் படுத்திக் கொண்டு புள்ளியினை $(x_1, x_2,...x_N)$ என்ற இலக்கெண் களால் குறிக்கிறோம். அதாவது N-பரிமாண வெளியில் புள்ளிகள் இருப்பதாகக் கற்பனையில் ஏற்கிறோம். பின்னர், பின்வரும் வரையறைகளையும் ஏற்கிறோம்.

I. N-பரிமாண வெளியில் இரண்டு புள்ளிகள் ஒரு வெக்டரை உறுதி செய்கின்றன. அந்த வெக்டரை தடித்த எழுத்தில் அச்சிடப் படும் தனி எழுத்தால் குறிக்கிறோம்.

II. **a, b** என்பன இரு வெக்டர்களானுல் அவை கீழ்க்கண்ட விதிகளுக்கு கட்டுப்படுகின்றன :

(i) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

(ii) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

(iii) $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{x}$ ஆனுல் $\mathbf{x}$ என்ற தன்னேரில்லாத வெக்டர் ஒன்று உண்டு.

III. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ என்பன மெய்யெண்களானுல் பின்வரும் விதிகளுக்கும் N-பரிமாண வெக்டர்கள் கட்டுப்படுகின்றன.

(i) $\alpha\, \mathbf{a} = \mathbf{a}\, \alpha$

(ii) $(\alpha_1 + \alpha_2)\, \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{a}$

(iii) $\alpha\, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\, \mathbf{a} + \alpha\, \mathbf{b}$

(iv) $\alpha_1\, (\alpha_2\, \mathbf{a}) = (\alpha_1\, \alpha_2)\, \mathbf{a}$

IV. N-பரிமாண வெளியில் N நேர்கோட்டுச் சார்பிலா வெக்டர்கள் உள்ளன. ஆனுல் ஒவ்வொரு $N+1$ வெக்டர்கள் உள்ள தொகுதியும் நேர்கோட்டுச் சார்புடைத்தவையாம்.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_N$ என்பன ஒரு தொகுதி நேர்கோட்டுச் சார்பிலா வெக்டர்களாயின், $\mathbf{X}$ என்னும் ஒரு வெக்டரை

$$\mathbf{X} = \alpha_1\, \mathbf{a}_1 + \alpha_2\, \mathbf{a}_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_N\, \mathbf{a}_N$$

என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம்.

α-க்கள் எல்லாவித மதிப்புகளேயும் ஏற்கும்போது கிடைக்கும். வெக்டர் தொகுப்பினே N-பரிமாண நேர்கோட்டிய வெக்டர் வெளி என்கிறேம்

V. அடுத்து N-பரிமாணத்தில் 'நீளம்', 'செங்குத்து' என்ற கருத்துகளே ஏற்றிப் பொருள் காண இரண்டு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கற்பலனே பின்வருமாறு வரையறை செய்கிறேம்.

a, b என்பன இரு N-பரிமாண வெக்டர்களானுல் அவற்றுடன் a.b என்ற ஓர் எண்ணேத் தொடர்பு படுத்துகிறேம். அந்த எண்ணுனது கீழ்க்கண்ட விதிகளுக்குக் கட்டுப்படுமானுல் அது அந்த வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கற்பலன் ஆகும்.

(i) $\mathbf{a}.\mathbf{a} = |\,\mathbf{a}\,|^2 > o$, இங்கு $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$

(ii) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$

(iii) $\mathbf{a}.\,(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c}$

(iv) $\alpha\, (\mathbf{a}.\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}.\mathbf{b})$ இங்கு α ஒரு மெய்யெண்.

இனி வெக்டர் a-ன் நீளம்

$|\,\mathbf{a}\,| = +\sqrt{\mathbf{a}.\mathbf{a}}$ என்று வரையறுக்கிறேம்.

$\mathbf{a}.\mathbf{b} = o$ ஆனுல் a,b என்பன செங்குத்து வெக்டர்கள் எனவும் வரையறை செய்கிறேம்.

16. தேற்றம்

N-பரிமாணத்தில், $m\,(m \leqslant N)$ நேர் கோட்டுச் சார்பிலா வெக்டர்களின் தொகுதி ஒன்று தரப்பட்டால் அதிலிருந்து நேர் கோட்டுச் சார்பிலாச் செங்குத்து வெக்டார்த் தொகுதி ஒன்று அமைக்க இயலும்.

$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots\ldots X_m$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட m நேர்கோட்டுச் சார்பிலா வெக்டர்களின் தொகுதியாக இருக்கட்டும். இவற்றி லிருந்து $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots a_m$ என்ற ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தான சார்பிலா வெக்டார்த் தொகுதி ஒன்று அமைக்க முடியும் என நிரூபிக்க வேண்டும்.

நிருபணம் :

$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots\ldots = C_m = o$ ஆக இருந்தால் மட்டுமே

$C_1\,\mathbf{X}_1 + C_2\,\mathbf{X}_2 + \ldots\ldots + C_m\,\mathbf{X}_m = \mathbf{0}$ ஆக

இருக்கமுடியும். ஏனெனில் $\{\mathbf{X}_i\}$ என்பன சார்பிலா வெக்டர்கள்.

எனவே $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{0}$ என்பது பெறப்படுகின்றது அவ்வாறில்லை யெனில் $C_1 = 1, \quad C_2 = C_3 = \ldots = C_m = o$ ஆகின்றது. அது $\{\mathbf{X}_i\}$ என்பன சார்பிலா வெக்டர்கள் என்று நாம் எடுத்துக் கொண்ட தற்கு முரண்பாடாக அமையும்.

இனி, $\mathbf{a}_1 = \dfrac{\mathbf{X}_1}{|\mathbf{X}_1|}$ ஆக இருக்கட்டும்

$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$ என்பது தெளிவு. எனவே $\mathbf{a}_1$ ஓர் அலகு வெக்டர்.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{X}_2 \ldots\ldots \mathbf{X}_m$ என்ற வெக்டர்கள் நேர்கோட்டுச் சார்பிலாதன என்பது தெளிவு.

இனி $\mathbf{a}'_2 = \mathbf{X}_2 - (\mathbf{X}_2 . \mathbf{a}_1)\,\mathbf{a}_1$ என்ற வெக்டரை எடுத்துக் கொள்வோம்

$\mathbf{a}_1 . \mathbf{a}_2 = \mathbf{X}_2 . \mathbf{a}_1 - (\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{a}_1)\,\mathbf{a}_1 . \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$

எனவே $\mathbf{a}_2{}^1$ என்பது $\mathbf{a}_1$-க்குச் செங்குத்தானது $\mathbf{a}_2 = \dfrac{\mathbf{a}_2{}^1}{|\mathbf{a}_2{}^1|}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால் $\mathbf{a}_2$ என்பது அலகு வெக்டர். அது $\mathbf{a}_1$-க்குச் செங்குத்தானது.

இப்பொழுது $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_3, \ldots\ldots \mathbf{x}_m$ என்ற வெக்டர்கள் நேர் கோட்டுச் சார்பிலாதன.

இனி $\mathbf{a}_3{}^1 = \mathbf{X}_3 - (\mathbf{X}_3 . \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 - (\mathbf{X}_3 . \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_2$ என்ற வெக்டரை எடுத் துக் கொள்வோம். இது $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ இவற்றிற்குச் செங்குத்தானது என்று நிரூபிக்கலாம்.

எனவே $\mathbf{a}_3 = \dfrac{\mathbf{a}_3{}^1}{|\mathbf{a}_3{}^1|}$ என்ற அலகு வெக்டரும் $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$-க்கு செங்குத்தானது.

ஆக $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots\ldots \mathbf{X}_m$ என்பது நேர்கோட்டுச் சார்பிலா வெக்டர் தொகுதி. இதே முறையைத் திரும்பத் திரும்பக் கடைப்பிடிப்போமானால் $\{\mathbf{X}_i\}$ தொகுதியை $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots \mathbf{a}_m$ தொகுதியாக மாற்றியமைக்க இயலும் வெக்டர் தொகுதி $\{\mathbf{a}\}$ நேர்கோட்டுச் சார்பிலா செங்குத்து வெக்டர் தொகுதியாகும்.

குறிப்பு : 1. மேற்கண்ட $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots \mathbf{a}_m$ போன்ற செங்குத்து அலகு வெக்டர் தொகுதியினை செங்குத்தியல்புத்தொகுதி என அழைக்கிறோம்.

2. $m = N$ ஆனால் செங்குத்தியல்புத் தொகுதி $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots \mathbf{a}_N$-ஐ முழுமையானது என்கிறோம். இப்பொழுது, V_N-ல் உள்ள $\mathbf{x}$ என்ற எந்தவொரு வெக்டரையும் $\mathbf{X} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_N \mathbf{a}_N$ ...(16.1) என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம்.

3. முப்பரிமாணத்தில் $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ என்ற செங்குத்தியல்புத் தொகுதி வெக்டர்கள் தெக்காட்டின் அச்சுகளோடு திசையமைவு கொண்ட இலக்கு வெக்டர்களாக அமைந்துள்ளன. அதே போன்று ஒரு முழுமையான செங்குத்தியல்புத் தொகுதி கொடுக்கப்பட்டால் அதனை N பரிமாணத்தில் கற்பனை செய்யும் செங்குத்துத் தெக்காட்டின் அச்சுகளோடு திசையமைவு கொண்ட இலக்கு வெக்டர் தொகுதியாகக் கொள்ளலாம். இந்த இலக்குவெக்டர்களின் முனைகளின் இலக்கெண்கள் (1, 0, 0,......0), (0, 1, 0,0......0), (0, 0, 1,......0)......(0, 0, 0,......1) என்பன ஆகும்.

4. 16.1-ல் காணும் $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_N$ என்ற மாறு எண்கள் $\mathbf{X}$ வெக்டரின் கூறுகள் எனப்படும்.

17. சில முடிவுகள்

ஒரு N-பரிமாண வெளியில் பின்வரும் முடிவுகளை எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

$$\mathbf{X} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \ldots\ldots + x_N \mathbf{a}_N$$
$$\mathbf{Y} = y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \ldots\ldots + y_N \mathbf{a}_N$$

என்பன இரு வெக்டர்களானால்

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = (x_1 + y_1) \mathbf{a}_1 + (x_2 + y_2) \mathbf{a}_2 + \ldots\ldots + (x_N + y_N) \mathbf{a}_N \ldots\ldots(17.1)$$
$$\alpha \mathbf{X} = \alpha x_1 \mathbf{a}_1 + \alpha x_2 \mathbf{a}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha x_N \mathbf{a}_N \ldots\ldots(17.2)$$
$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots\ldots + x_N y_N \ldots\ldots(17.3)$$
$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots\ldots + x_N{}^2 \qquad \ldots\ldots(17.4)$$

எனவே $|\mathbf{X}| = +\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots\ldots + x_N{}^2}$

3. மரபுகள்
(Convention)

இனி, பண்புரு பற்றி விரிவாகக் கற்பதன் முன்னர், சில பயன் மிக்க குறியீட்டு மரபுகள் (notational conventions) பற்றி அறிவது இன்றியமையாததாகின்றது. அவற்றின் விளக்கம் வருமாறு.

18. இலக்கெண்களுக்கு மேற்குறி குறியீட்டு முறை (Superscript Notation)

இதுவரை ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்களை $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_N)$ எனக் கீழ்க்குறிகளுடன் (Subscripts) குறித்துவந்தோம். இனி, அவற்றை $(x^1, x^2, \ldots\ldots x^N)$ என மேற்குறி (Superscript) களுடன் குறிப்போமாக. இக்குறியீட்டு முறையில் மேற்குறிகளாக வரும் $1, 2, 3 \ldots\ldots N$ என்ற பின்னிணைப்புகள் (Suffixes) கீழ்க்குறிகளைப் போன்றே அடையாளச் சின்னங்கள் ஆகும். அவை அடுக்குக் குறிகள் (Power indices) அல்ல என்பதனை நன்கு அறிய வேண்டும். இவ்வாறு மேற்குறியீட்டு முறையைப் பயன்படுத்துவதற்கான காரணத்தைப் பின்னர் காண்போம்.

இனி, (x^1, x^2) என்பது இரு-பரிமாண வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளி; (x^1, x^2, x^3) என்பது முப்பரிமாண வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளி.

இனி, மேற்குறிகளைப் பின்னிணைப்புகளாகப் பயன்படுத்தப் போவதால் அடுக்குக் குறிகளை அடைப்புகளின் (brackets) உதவி கொண்டு குறிக்கிறோம். எனவே x-ன் வர்க்கம் என்பதனை $(x)^2$ என்றே குறிக்கிறோம்.

19. சுட்டிணைப்பு மரபு (Indicial Convention)

இம் மரபின்படி, ஓர் N-பரிமாண வெளியில் $(a_1, a_2, \ldots\ldots a_N)$ என்ற தொகுதியினைச் சுருக்கமாக a^i என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

i என்ற ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்து பின்னிணைப்பாக இருந்து 1 லிருந்து N வரை எல்லா மதிப்புகளையும் ஏற்கிறது. i என்ற பின்னிணைப்பு ஒரு முழுத் தொகுதியினைச் சுட்டுவதால் அதைச் சுட்டிணைப்பு என்கிறோம். சுட்டிணைப்புகளை மேற்குறிகளாகவும், கீழ்க்குறிகளாகவும் பயன்படுத்தலாம்.

இனி, $(x^1, x^2, x^3, \ldots\ldots x_N)$ என்ற ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்களை சுருக்கமாக x^i எனக் குறிக்கலாம்.

இம்முறைப்படி தொகுதியினைக் குறிக்க i என்ற ஆங்கில எழுத்தை மட்டுமே பயன்படுத்த வேண்டும் என்கிற கட்டுப்பாடு எதுவுமில்லை. j, k, l என்ற ஆங்கில எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தலாம். அதாவது எந்த ஓர் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்தை பின்னிணைப்பாகப் பயன்படுத்தினாலும் அது 1 லிருந்து N வரை மதிப்புகளை ஏற்று ஒரு தொகுதியினை உருவாக்குகின்றது என்று கொள்கிறோம். எனவே ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்களை x^i என்றோ அல்லது x^j அல்லது x^l என்றோ குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) b^k என்பது $(b^1, b^2, b^3, \ldots b^N)$ என்னும் தொகுதியினைக் குறிக்கிறது.

(2) முப்பரிமாண வெளியில் $a_i\, x^j$ என்பது பின்வரும் 9 உறுப்புகளின் தொகுதியைச் சுருக்கமாகக் குறிக்கிறது.

$$\begin{bmatrix} a_1x^1, & a_1x^2, & a_1x^3 \\ a_2x^1, & a_2x^2, & a_2x^3 \\ a_3x^1, & a_3x^2, & a_3x^3 \end{bmatrix}$$

அதாவது i, j என்பன 1-லிருந்து 3 வரை எல்லா மதிப்புகளையும் ஏற்கின்றன.

(3) N-பரிமாண வெளியில் கீழ்க்காணும் N^2 உறுப்புகளை

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2N} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{N1} & a_{N2}\ldots\ldots a_{NN} \end{bmatrix}$$

சுருக்கமாக a_{ij} என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

(4) இதுவே போன்று a_{ijk} என்பது i, j, k என்பன 1-லிருந்து N வரை மதிப்புகளை ஏற்கும் போது தோன்றும் N^3 உறுப்புகளின் தொகுதியினைக் குறிக்கும்.

20. கூட்டல் மரபு (Summation Convention)

"ஓர் உறுப்பில் ஓர் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துச் சுட்டிணைப்பு இருமுறை வரப்பெற்றால், அது அந்தச்சுட்டிணைப்பு 1 லிருந்து N வரை எடுத்துக் கொள்ளும் எல்லா மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகையினைக் குறிக்கும்." இதைக் கூட்டல் மரபு என்கிறோம். இதை முதன் முதலில் அறிமுகப்படுத்தியவர் ஐன்ஸ்டீன் ஆவார்.
இம் மரபின்படி,

(i) $a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_N x^N$ ......(20.1)

(ii) $x^K x^K = x^1 x^1 + x^2 x^2 + \ldots\ldots + x^N x^N = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^N)^2$ ......(20.2)

(iii) $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots\ldots + a_{NN}$ ......(20.3)

(iv) $a_{jk} x^k = a_{j1} x^1 + a_{j2} x^2 + \ldots\ldots + a_{jN} x^N$ ......(20.4)

$a_i x^i$ என்பதை $a_k x^k$ என்றோ $a_l a^l$ என்றோ குறிக்கலாம். அதாவது எந்த ஒரு சுட்டிணைப்பு $a_i x^i$ என்ற உறுப்பில் இருமுறை வந்தாலும் அது, அதே கூட்டுத்தொகையைத்தான் குறிக்கிறது. எனவே கூட்டல் மரபு ஏற்று ஓர் உறுப்பில் இருமுறை வரும் சுட்டிணைப்பைப் **போலிச்சுட்டிணைப்பு** (dummy index) அல்லது **நிழலுருச் சுட்டிணைப்பு** (umbral index) என்கிறோம்.

ஓர் உறுப்பில் ஒரேவொரு முறை வரும் சுட்டிணைப்பைக் **கட்டற்ற சுட்டிணைப்பு** (free Index) என்கிறோம். அது 1 லிருந்து N வரையுள்ள ஏதாவதொரு எண்ணைக் குறிக்கும், 20.4ல் உள்ள j ஒரு கட்டற்ற சுட்டிணைப்பு.

குறிப்பு 1: இம்மரபுகளின்படி,

$$a_{ij} x^j = y_i \qquad \ldots\ldots(20.5)$$

என்பது N சமன்பாடுகளைக் குறிக்கின்றது. அவற்றை விரித்து எழுதினால்

$$a_{11} x^1 + a_{12} x^2 + a_{13} x^3 + \ldots\ldots + a_{1N} x^N = y_1$$
$$a_{21} x^1 + a_{22} x^2 + a_{23} x^3 + \ldots\ldots + a_{2N} x^N = y_2$$
$$a_{31} x^1 + a_{32} x^2 + a_{33} x^3 + \ldots\ldots + a_{3N} x^N = y_3$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{N1} x^1 + + a_{N2} x^2 + a_{N3} x^3 + \ldots\ldots a_{NN} x^N = y_N$$

என்ற N சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இதில் j என்பது போலிச் சுட்டிணைப்பு, i கட்டற்ற சுட்டிணைப்பு.

குறிப்பு 2: $a_k\, x^k = 1$ என்பதால் குறிக்கப்படும் இயங்கு வரை (Locus).

$$a_1\, x^1 + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \;\ldots\ldots + a_N\, x^N = 1 \qquad (20.6)$$

என்பதாகும்.

$N=2$ ஆயின் $a_1\, x^1 + a_2\, x^2 = 1 \rightarrow$ இது சமதளத்திலுள்ள ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கிறது.

$N=3$ ஆயின் $a_1\, x^1 + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 = 1 \rightarrow$ இது முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு சமதளத்தைக் குறிக்கிறது. பொதுவாக 20.6, N–பரிமாண வெளியில் ஒரு மாவிரி தளத்தைக் குறிக்கிறது.

குறிப்பு 3: $x^i x^i = 1$ ஆல் குறிக்கப்படும் இயங்குவரை $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots\ldots\ldots + (x^N)^2 = 1$ ...(20.7) ஆகும்.

$N=2$: $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$ சமதளத்தில் 1 ஆரையுள்ள ஒரு வட்டம்.

$N=3$: $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ என்பது ஒரு கோளம்.

பொதுவாக 20.7 ஒரு மாவிரி கோளத்தைக் குறிக்கிறது.

குறிப்பு 4: இம் மரபுகளின்படி எழுதும்போது குழப்பம் ஏற்படாமலிருக்க,

"ஒரு தனி உறுப்பிலோ அல்லது பெருக்குத் தொகையிலோ ஒரு சுட்டிணைப்பை இருமுறைகளுக்குமேல் எழுதக்கூடாது", என்ற விதியினைக் கடைப்பிடிக்கின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$\left(\sum_{1}^{N} a_i\, x^i\right)^2$ என்பதனை $a_i x^i a_i x^i$ என்று எழுதுவதில்லை, மாறாக $a_i a_j x^i x^j$ என்றே எழுதுகிறோம்.

மேற்சொன்ன விதியினைக் கடைப்பிடிக்க முடியாத நிலை ஏற்பட்டால் கூட்டல் மரபினை தள்ளி வைத்துவிட்டு எல்லா கூட்டுத் தொகைகளையும் விரிவாக, வெளிப்படையாக எழுதிவிடவேண்டும்.

குறிப்பு 5: ஓர் உறுப்பில் பின்னிணைப்புகள் இருமுறை எழுதப்பட வேண்டியிருந்து, அது கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்காத நிலையிலிருந்தால் ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துக்களைப் பின்னிணைப்புகளாகப் பயன் படுத்துகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_N x^N$ ஆகும்.

இந்தக் கூட்டுத் தொகையில் ஒரு தனிப்பட்ட உறுப்பைப் பொதுவாகக் குறிப்பிட வேண்டுமானுல் $a_M\ x_M$ என்று எழுத வேண்டும். இதில் வரும் M என்ற பின்னிணைப்பு கூட்டல் மரபினை யொட்டி வந்த சுட்டிணைப்பன்று.

21. க்ரோனகரின் டெல்டா (Kronecker's Delta)

ஓர் உருப்படியின் (entity) மதிப்பு $i = j$ ஆக இருக்கும் போது 1 ஆகவும், $i \neq j$ ஆக இருக்கும் போது O ஆகவும் இருந்தால் அதனை δ^i_j என்ற குறியீட்டினுல் குறிக்கிறோம் அதனை **க்ரோனகரின்** டெல்டா என்றழைக்கிறோம்.

எனவே

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \text{ எனின்} \\ 0, & i \neq j \text{ எனின்} \end{cases}$$

க்ரோனகர் டெல்டாவின் இயல்புகள் (Properties of Kronecker Delta)

இயல்பு 1. x^i அதாவது $(x^1, x^2, \ldots\ldots x^N)$ என்பன ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும். அவை ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலாதன வாகையால்,

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^k_j \quad \text{ஆகும்} \qquad \ldots\ldots(21.1)$$

இயல்பு 2. $\delta^i_j A^j = A^i$ **(21.2)**. ஏனெனில் இடதுபக்கத்தில் $i = j$ ஆக இருக்கும் ஒரே உறுப்புத்தான் எஞ்சியிருக்கும்; மற்றவை பூச்சியமாகின்றன.

இயல்பு 3. $\delta^i_j \delta^j_k = \delta^i_k$ **(21.3)** ஏனெனில் இடது பக்கத்தில் முதல் டெல்டாவில் எஞ்சியிருக்கும் உறுப்பு $j = i$ ஆன உறுப்புத் தான். அல்லது இரண்டாவது டெல்டாவில் $j = k$ ஆன உறுப்புத்தான் எஞ்சும்.

இயல்பு 4. ஒரு N-பரிமாண வெளியில் $\delta^i_i = N$ ஆகும்.

ஏனெனில்,

$$\begin{aligned} \delta^i_i &= \delta^1_1 + \delta^2_2 + \ldots\ldots + \delta^N_N \quad \text{(கூட்டல் மரபுப்படி)} \\ &= 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 (N \text{ உறுப்புகளுக்கு}) \\ &= N. \end{aligned}$$

இயல்பு 5. $\bar{x}^i = \bar{x}\ (x^j)$ ஆனால்

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\ \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta^k_j \text{ ஆகும்.}$$

நிருபணம்

$\bar{x}^i = \bar{x}^i\ (x^j)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது நாம் ஏற்றுக்கொண்ட மரபுகளின்படி

$\bar{x}^i = \bar{x}^i\ (x^1, x^2, x^3, \ldots x^N)$ ஆகிறது.

i என்பது 1 லிருந்து N வரை ஏற்கும்போது மேலே கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாடு உண்மையில் N சமன்பாடுகளைக் குறிக்கின்றது. அவற்றில் x^i என்பன ஒன்றிற்கொன்று சார்பிலாதன $\bar{x}^i$ என்பனவும் சார்பிலாதன.

எனவே வகையிடலின் சார்பின் சார்பு விதியைப் பயன்படுத்தி,

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^1}\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^2} \cdot \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^j} + \ldots + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^N} \cdot \frac{\partial \bar{x}^N}{\partial x^j}$$

அதாவது $\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j} = \dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$ என்று எழுதலாம் (கூட்டல் மரபு)

ஆனால் இயல்பு 1 ன் படி $\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^k_j$

எனவே $\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta^k_j$ ......(21.4)

இயல்பு 6. $|A| = |a_{ij}|$ என்பது ஓர் n-ம் அடைவு அணி கோவை (n[th]order determinant) ஆக இருக்கட்டும்.

A_{ji} என்பது a_{ij} என்ற உறுப்பின் இணைச்சினை (Cofactor) ஆக இருந்தால்

$$a_{ir}\ A_{rj} = |\ A\ |\ \delta^i_j \text{ ஆகும்.}$$

நிருபணம்

அணிகோவையின் நன்கறிந்த இயல்புகளில் ஒன்று

$a_{i1}\ A_{1j} + a_{i2}\ A_{2j} + a_{i3}\ A_{3j} + \ldots + a_{iN}\ A_{Nj}$

$= |\ A\ |,\ i = j$ எனில்

$= O,\ i \neq j$ எனில்

கூட்டல் மரபினையும், க்ரோனகர் டெல்டாவினையும் பயன்படுத்தி அதை $a_{ir}\ A_{rj} = |\ A\ |\ \delta^i_j$ என எழுதலாம். இதுவே நாம் நிருபிக்க வேண்டிய முடிவு.

ஓர் அணிகோவையில் நிரைகளையும் நிரல்களையும் (rows and columns) இடமாற்றி அமைக்கலாம். ஆதலால் மேற்சொன்ன முடிவைக் கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம்.

$$a_{ri}\, A_{jr} = |\,A\,|\, \delta^{j}_{i} \qquad \ldots\ldots(21.5)$$

இயல்பு 7. ஒரு செங்கோண இலக்கெண் அமைப்பில் $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \ldots\ldots \mathbf{e}_N$ என்பன அச்சுகளின் திசைகளில் அமைந்த அலகுவெக்டர்களானல் $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^{i}_{j}$ ......(21.6)

புள்ளி பெருக்கற் பலனின் வரையறையிலிருந்தே மேற்கண்ட முடிவை எளிதில் பெறலாம்.

22. மாறியல் அல்லது வரிசை மாற்றக்குறியீடு (The alternating or permutation symbol)

ஒரு முப்பரிமாண வெளியில் $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று திசைகளில் அமைந்த அலகு வெக்டர்களாக இருக்கட்டும்.

இனி $[\mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_j\, \mathbf{e}_k]$ என்ற அளவி முப்பெருக்குத்தொகையின் (Scalar triple product) மதிப்பு,

(1) i, j, k இவற்றில் ஏதேனும் இரண்டு சமமானுல் $= 0$

(2) i, j, k சமமில்லாதிருந்து வட்ட வரிசையிலிருந்தால் $= +1$

(3) i, j, k சமமில்லாதிருந்து வட்ட வரிசையில் இல்லாதிருந்தால் $= -1$

இந்த முடிவைப் பொதுவாக்கி, சுருக்கமாக e_{ijk} என்ற ஒரே குறியீட்டினுல் குறிக்கிறேம். அதன் மதிப்பு,

$$e_{ijk} = \begin{cases} = 0 & i, j, k \text{ இவற்றில் ஏதேனுமிரண்டு சமம் என்றால்} \\ = +1 & i \neq j \neq k \text{ ஆக இருந்து அவை வட்ட வரிசையிலிருந்தால்} \\ = -1 & i \neq j \neq k \text{ ஆக இருந்து அவை வட்ட வரிசையில் இல்லாதிருந்தால்} \end{cases}$$

என்று வரையறை செய்கிறேம்.

e_{ijk} என்பதனை மாறியல் குறி அல்லது வரிசைமாற்றுக் குறி என்று அழைக்கிறேம்.

மாறியல் குறியின் இயல்புகள்

இயல்பு 1: $\delta^{i}_{j}\, e_{ijk} = 0$

நிருபணம்: முதல் குறி $i \neq j$ என்றால் பூச்சியமாகிறது இரண்டாவது $i = j$ எனில் பூச்சியமாகிறது, எனவே $\delta^i_j \; e_{ijk} = 0$.

இயல்பு 2:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவை

யின் மதிப்பு $a^i_1 \; a^j_2 \; a^k_3 \; e_{ijk}$ ஆகும்.

நிருணபம்

$$\triangle = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = a^1_1 \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} - a^1_2 \begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix}$$

$$+ a^1_3 \begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{vmatrix}$$

மேலும் விரித்தெழுத

$$\triangle = a^1_1 \; a^2_2 \; a^3_3 - a^1_1 \; a^3_2 \; a^2_3 - a^2_1 \; a^1_2 \; a^3_3 + a^3_1 \; a^1_2 \; a^2_3$$

$$+ a^2_1 \; a^3_2 \; a^1_3 - a^3_1 \; a^2_2 \; a^1_3$$

$$= a^i_1 \; a^j_2 \; a^k_3 \; e_{ijk}.$$

இயல்பு 3:

$$e_{ijk} \; e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m & \delta^i_n \\ \delta^j_l & \delta^j_m & \delta^j_n \\ \delta^k_l & \delta^k_m & \delta^k_n \end{vmatrix}$$ ஆகும்.

நிருபணம்

$$\triangle = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

முதல் இரண்டு நிரல்களைப் பரிமாற்றம் செய்ய அதன் மதிப்பில் குறிமாற்றம் நிகழ்கிறது.

$$\therefore \begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = -\triangle$$

எனவே பல்வேறு நிரல் மாற்றங்களுக்குப் பொதுவாக

$$\begin{vmatrix} a^i_1 & a^i_2 & a^i_3 \\ a^j_1 & a^j_2 & a^j_3 \\ a^k_1 & a^k_2 & a^k_3 \end{vmatrix} = e_{ijk} \triangle \text{ என எழுதலாம்.}$$

இவ்வாறே பல்வேறு நிரை மாற்றங்களுக்குப் பொதுவாக

$$\begin{vmatrix} a^1_l & a^1_m & a^1_n \\ a^2_l & a^2_m & a^2_n \\ a^3_l & a^3_m & a^3_n \end{vmatrix} = e_{lmn} \triangle \text{ என எழுதலாம்.}$$

எனவே மேற்கூறிய மாற்றங்கள் இரண்டையும் சேர்ந்து பல்வேறு நிரல், நிரை மாற்றங்களுக்கு

$$\begin{vmatrix} a^i_l & a^i_m & a^i_n \\ a^j_l & a^j_m & a^j_n \\ a^k_l & a^k_m & a^k_n \end{vmatrix} = e_{ijk}\, e_{lmn} \triangle$$

எனக் கிடைக்கிறது. a^p_q-வை δ^p_q ஆல் பிரதியிட்டால் $\triangle = 1$ ஆகிறது.

எனவே

$$\begin{vmatrix} \delta^i_l & \delta^i_m & \delta^i_n \\ \delta^j_l & \delta^j_m & \delta^j_n \\ \delta^k_l & \delta^k_m & \delta^k_n \end{vmatrix} = e_{ijk}\, e_{lmn}$$

இதுவே வேண்டும் முடிவு.

இயல்பு 4:

$$e_{ijn}\, e_{lmn} = \delta^i_l\, \delta^j_m - \delta^i_m\, \delta^j_l$$

இயல்பு 3ன்படி.

$$e_{ijk}\, e_{lmn} = \delta^i_l \left(\delta^j_m \delta^k_n - \delta^k_m \delta^j_n \right) - \delta^i_m \left(\delta^j_l \delta^k_n - \delta^k_l \delta^j_n \right) + \delta^i_n \left(\delta^j_l \delta^k_m - \delta^k_l \delta^j_m \right)$$

$k = n$ எனப் பிரதியிட

$$e_{ijn}\, e_{lmn} = 3\delta^i_l\, \delta^j_m - \delta^i_l\, \delta^j_m - 3\,\delta^i_m\, \delta^j_l + \delta^i_m\, \delta^j_l + \delta^i_m\, \delta^j_l - \delta^i_l\, \delta^j_m ; \left[\because \delta^n_n = 3 \right]$$

$$= \delta^i_l\, \delta^j_m - \delta^i_m\, \delta^j_l$$

குறிப்பு :

$$e_{imn}\, e_{lmn} = \delta^i_l\, \delta^m_m - \delta^i_m\, \delta^m_l$$

$$= 3\,\delta^i_l - \delta^i_l = 2\,\delta^i_l .$$

4. பண்புருக்கள்
(Tensors)

23. பயன்பாட்டுக் கணிதத்தில் (Applied Mathematics) பகுமுறை ஆய்வு செய்யும்பொழுது ஓர் இலக்கெண் அமைப்பை முதலில் ஏற்கிறோம். பின்பு அந்த அமைப்பைப் பயன்படுத்தி இயற்பியல் உருப்படிகளையோ (Physical entities) அல்லது கருத்தியலானக் (abstract) கணித உருப்படிகளையோ, எண்களின் அல்லது சார்புகளின் தொகுதிகளினால் குறிக்கிறோம். ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில் ஓர் உருப்படியை முழுமையாக உறுதி செய்யும் எண்கள் அல்லது சார்புகளை அந்த உருப்படியின் **கூறுகள்** என்று சொல்கிறோம்.

பொருண்மை (mass) அடர்த்தி (density) வேலை (work) ஆற்றல் (energy) வெப்பநிலை (temperature) போன்ற இயற்பியல் உருப்படிகளை, நம் சாதாரண முப்பரிமாண வெளியில் குறிப்பதற்கு ஒரே ஒரு தனி எண்ணோ அல்லது தனிச் சார்போ போதுமானது. ஒரு புள்ளியின் அமைநிலை, ஒரு துகளின் திசைவேகம், ஒரு புள்ளியின் செயல்படும் விசை இவற்றை நம் சாதாரண வெளியில் குறிக்க மூன்று எண்கள் அல்லது சார்புகள் தேவைப் படுகின்றன. அதாவது இந்த உருப்படிகளுக்கு மூன்று கூறுகள் உள்ளன.

ஓர் அச்சைச் சுற்றி ஏற்படுகின்ற சுழற்சி, ஒரு பாய் பொருளினுள் உள்ள ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுகிற அழுத்தம், ஓர் உருச்சிதையும் பிண்டத்தில் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படும் தகவமுக்கம், (stress) தகவிழுவை (strain) முதலியனவற்றிற்கு $9=3^2$ கூறுகள் உள்ளன. ஒரு மீள் இயல்புடைய (elastic) பருப்பொருளின் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படும் சிதைவைக் குறிக்க $27=3^3$ எண்கள் தேவை.

எனவே பல்வேறு இயல்பியல் உருப்படிகளைக் குறிக்க 3^0, 3^1, 3^2, 3^3,... எண்களோ அல்லது சார்புகளோ தேவைப்

படுகின்றன. இதில் அடிப்படை எண்ணுக வருகின்ற இந்த உருப்படிகள் சார்ந்துள்ள வெளியின் பரிமாணத்தின் எண் ஆகும். எனவே இதே உருப்படிகளை ஓர் N-பரிமாண வெளியில் குறிப்பதற்கு N^0, N^1, N^2, N^3...எண்களோ அல்லது சார்புகளோ தேவைப்படும்.

24. இனி, ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில் ஓர் உருப்படி சில கூறுகளால் தரப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது இலக்கெண் அமைப்பை மாற்றி யமைப்போமாளுல், புதிய இலக்கெண் அமைப்பில் அந்த உருப்படியின் கூறுகள் மாறுபடும். ஆனுல் அந்த உருப்படியின் அடிப்படைப் பண்பு மாருது. எடுத்துக் காட்டாக, முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளியின் அமைநிலை, ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில் (x^1, x^2, x^3) ஆக இருக்கட்டும். அச்சுகளை நிலைமாற்றி அமைத்தபின் அதன் அமைநிலை (x^1, x^2, x^3) ஆக இருக்கட்டும். புள்ளியின் அடிப்படைப் பண்பாகிய அது இருக்கும் இடம், அதாவது அமைநிலை மாறவில்லை. ஆனுல் அதன் கூறுகள் (x^1, x^2, x^3) என்பனவற்றிலிருந்து (X^1, X^2, X^3)க்கு மாறி விட்டன. எனவே இலக்கெண் நிலைமாற்றம் ஏற்படும் பொழுது ஓர் உருப்படியின் கூறுகளில் மாற்றம் நிகழ்கின்றது. அத்தகைய மாற்றம் ஒரு மாற்றுருவிதிக்குக் (law of transformation) கட்டுப் பட்டால் அந்த உருப்படியைப் பண்புரு (Tensor) என்கிறேம்.

வரையறை : இலக்கெண் அமைப்பு மாறும் பொழுது, ஓர் உருப் படியைக் குறிக்கும் எண்கள் அல்லது சார்புகளாகிய கூறுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட மாற்றுரு விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு மாறிஞல் அந்த உருப்படியைப் பண்புரு என்கிறேம்.

வரையறை : இலக்கெண் அமைப்பு மாறும் பொழுது ஓர் உருப் படியின் மதிப்பு மாருதிருந்தால் அதனை **அளவி (Scalar)** அல்லது **மாற்றமிலி (Invariant)** என்கிறேம்.

$x^i, \bar{x}^j$ என்பன இருவேறு இலக்கெண் அமைப்புகளில் ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும். (சுட்டிணைப்பு மரபு பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது) ϕ என்பது x^i என்ற இலக்கெண்களின் சார்பாக இருக்கட்டும். $\bar{x}^j$என்ற அமைப்பிற்கு மாற்றிய பிறகு $\bar{\phi}$ என்பது அந்தச் சார்பின் மதிப்பாக இருக்கட்டும்.

$$\overline{\phi}(\overline{x}^j) = \phi(x^i)$$

அதாவது $\bar{\phi} = \phi$ எனவே, ϕ என்பது ஒரு மாற்றமிலி ஆகும்.

25. இருவகை அடிப்படை மாற்றுருவிதிகள்

இருவேறு சுட்டச்சு அமைப்புகளில் x^i, $\bar{x}^j$ என்பன ஒரே புள்ளியின் இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும். இவ்விரு இலக்கெண் தொகுதிகளுக்கு இடையே

$$\bar{x}^j = \bar{x}^j\ (x^1,\ x^2,\ x^3, \ldots x^N) \qquad \ldots\ldots(25.1)$$

என்ற சார்பிலா (independent) N தொடர்புகள் உள்ளன என்று கொள்வோம்.

மறுதலையாக,

$$x^i = x^i\ (\bar{x}^1,\ \bar{x}^2, \ldots\ldots \bar{x}^N) \qquad \ldots\ldots(25.2)$$

ஆக இருக்கட்டும்.

சமன்பாடுகள் 25·1ம் 25·2ம் ஓர் இலக்கெண் அமைப்பிலிருந்து மற்ருென்றுக்கு மாறும் நிலைமாற்றத்தை வரையறை செய்கின்றன. தொடர்புகள் 25.1 லிருந்து $d\bar{x}^j$ என்ற வகையீடுகளை (diffeıentials) பின்வரும் சமன்பாடுகளால் எழுதலாம்.

$$d\bar{x}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^2} dx^2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^N} dx^N$$

$$j = 1,\ 2, \ldots\ldots N$$

இதனைக் கூட்டல், சுட்டிணைப்பு மரபுகளைப் பயன்படுத்தி

$$d\bar{x}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\ dx^i \qquad \ldots\ldots(25.3)$$

என்று எழுதலாம்.

எனவே $(\bar{x}^1,\ \bar{x}^2, \ldots\ldots \bar{x}^N)$ இலக்கெண் அமைப்பைச் சார்ந்த $d\bar{x}^1$, $d\bar{x}^2, \ldots\ldots d\bar{x}^N$ என்ற N உருப்படிகளுக்கும் $(x^1,\ x^2, \ldots\ldots x^N)$ இலக்கெண் அமைப்பைச் சார்ந்த dx^1, $dx^2, \ldots\ldots dx^N$ என்ற N உருப்படிகளுக்கும், உள்ள தொடர்புகள் 25.3 என்ற மாற்றுரு விதியினுல் தரப்படுகின்றன.

அடுத்து, ϕ என்பது x^i என்ற புள்ளியில் வரையறை செய்யப் பட்ட ஒரு மாற்றமிலியாக இருக்கட்டும். x^i என்பன $\bar{x}^j$ ஆக நிலைமாற்றம் செய்யப்படும் போது அதன் மதிப்பு $\bar{\phi}$ ஆக இருக்கட்டும்.

மாற்றமிலி, ஆகையால்

$$\bar{\phi}(\bar{x}^j) = \phi(x^i)$$

பகுதி வகையிடலின் (partial differentiation) விதியொன்றினுல்

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}$$

அதாவது
$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \qquad \ldots\ldots(25.4)$$

என்று எழுதலாம்.

எனவே x^i அமைப்பைச் சார்ந்த $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ என்ற N உருப்படிகள், $\bar{x}^j$ அமைப்பைச் சார்ந்த $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^j}$ என்ற N உருப்படிகளாக மாற்றுருவிதி 25.4-ன்படி மாறுகின்றன.

பொதுவாக நோக்குங்கால் 25.3, 25.4 ஆகியவற்றுல் தரப்படும் மாற்றுருவிதிகள் வேருனவை. இரண்டும், இருவேறுவகை அடிப்படை மாற்றுரு விதிகள் ஆகும். 25.3 விதிப்படி மாறுகின்ற உருப்படிகளை முரண்மாறி வெக்டரின் (contravariant vector) கூறுகள் என்கிறோம். முரண்மாறி வெக்டரை முதல் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புரு (Contravariant tensor of rank one) அல்லது முதல் அடைவு முரண்மாறிப் பண்புரு (Contravariant tensor of order one) என்றும் கூறலாம்.

விதி 25.4ன் படி மாறுகின்ற உருப்படிகளை உடன்மாறி வெக்டரின் (Covariant vector) கூறுகள் என்கிறோம். உடன்மாறி வெக்டரை முதல்தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புரு என்றே அல்லது முதல் அடைவு உடன்மாறிப் பண்புரு என்றே அழைக்கலாம்.

மேலே கண்ட இருவகை அடிப்படை மாற்றங்களை மனத்தில் கொண்டு, இனி, நாம் பொது விதிகளை வரையறை செய்வோமாக.

26. வரையறை

(1) முரண்மாறி வெக்டர்

x^i அமைப்பைச் சார்ந்த $A^1, A^2, \ldots A^N$ என்ற N உருப்படிகள் $\bar{x}^j$ அமைப்பைச் சார்ந்த $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \ldots\ldots \bar{A}^N$ என்ற N உருப்படிகளுடன்

$$\bar{A}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \mathbf{A}^i \qquad \ldots(26.1)$$

என்ற சமன்பாடுகளால் தொடர்பு படுத்தப்பட்டால் A^i என்பன ஒரு முரண்மாறி வெக்டரின் அல்லது முதல் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புரு வின் கூறுகள் ஆகும்.

சுருக்கமாக, A^i என்பதை ஒரு முதல்தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புரு என்று கூறுகிறோம்.

(2) உடன் மாறி வெக்டர்

x^i அமைப்பைச் சார்ந்த A_i என்ற N உருப்படிகள், x^j அமைப்பைச் சார்ந்த $\overline{A}_j$ என்ற N உருப்படிகளுடன்

$$\overline{A}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} A_i \qquad \ldots(26.2)$$

என்ற சமன்பாடுகளால் பிணைக்கப்பட்டால் A_i என்பன ஓர் **உடன் மாறி வெக்டரின்** அல்லது முதல் **தகுநிலை** உடன்மாறிப் பண்புரு வின் கூறுகள் ஆகும்.

சுருக்கமாக, A_i என்பது ஒரு முதல் தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புரு என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

குறிப்பு :

1. இனி, மேற்குறி முரண்மாறித் தன்மையையும், கீழ்க்குறி உடன்மாறித் தன்மையையுமே குறிக்கும் என அறிக.

மேற்கூறிய மரபுடன் ஒத்துப் போவதற்காக 25.4 உள்ள $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ என்ற உடன்மாறி வெக்டரின் சுட்டிணைப்பைக் கீழ்க்குறியாகக் கொள்கிறோம்.

2. ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்கள் x^i மேற்கூறிய மரபுக்கு விதிவிலக்கு. x^i என்பதில் i என்ற சுட்டிணைப்பு மேற்குறியாக இருப்பினும் அதற்கு முரண்மாறித் தன்மை எல்லாத் தறுவாய்களிலும் இருப்பதில்லை.

$$\overline{x}^j = a^j_i x^i \qquad \ldots\ldots(26.3)$$

என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படும் இலக்கெண் நிலை மாற்றத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். a^j_i என்பன மாறிலிகளாக இருக்கட்டும். 26.3 ஐ x^i ப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} = a^j_i$$

இதை 26.3 ல் பிரதியிட

$$\overline{x}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} x^i \quad \text{இது முரண்மாறி மாற்றுருவிதி.} \qquad \ldots\ldots(26.4)$$

எனவே x^i என்பன 26.3 ஆல் உறுதி செய்யப்பட்ட நிலை மாற்றத்தின் போது மட்டுமே முரண்மாறி வெக்டரின் கூறுகளாக உள்ளன.

எனவே x^i என்பன ஒரு குறிப்பிட்ட நிலைமாற்றத்தின் போது மட்டுமே முரண்மாறித் தன்மை பெறுகின்றன. இதனை மனத்தில் கொண்டே நாம் இலக்கெண்களுக்கு மேற்குறி மரபை அறிமுகப் படுத்தினோம். இருப்பினும் பொதுவாக எல்லா நிலை மாற்றங் களுக்கும் x^i, முரண்மாறித் தன்மை பெற்றன அல்ல என்பதை நன்கறிய வேண்டும்.

3. $\dfrac{\partial \phi}{\partial x^i}$ என்ற உடன்மாறி வெக்டரை ϕ சாய்வு விகிதம் (**gradient**) என்றழைக்கிறோம்.

4. இனி A^i அல்லது A_i என்ற பண்புருக் கூறுகளை பண்புரு A^i அல்லது A_i என்றே குறிப்பிடுவோம். இதனால் எந்தவித கருத்துக் குழப்பமும் நேராது.

27. இரண்டாம் அடைவுப் பண்புருக்கள் (Second Order Tensors)

இனி, இரண்டாம் அடைவு அல்லது இரண்டாம் தகுநிலைப் பண்புருக்களை வரையறை செய்வோமாக.

வரையறை

(1) x^i அமைப்பைச் சார்ந்த A^{ij} என்ற N^2 உருப்படிகள், $\bar{x}^j$ அமைப்பைச் சார்ந்த $\bar{A}^{kl}$ என்ற N^2 உருப்படிகளுடன்

$$\bar{A}^{kl} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \quad \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} A^{ij} \qquad \ldots\ldots(27.1)$$

என்ற மாற்றுரு விதியினால் தொடர்புபடுத்தப் பட்டால், A^{ij} என்பன ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புருவின் கூறுகள் ஆகும்.

இந்த வரையறை முதல் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புரு வரையறையின் நீட்சியே ஆகும்.

சுருக்கமாக, A^{ij} என்பதை ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை முரண் மாறிப் பண்புரு என்கிறோம்.

(2) இதே போன்று, x^i அமைப்பைச் சார்ந்த A^{ij} என்ற N^2 உருப்படிகள், $\bar{x}^j$ அமைப்பைச் சார்ந்த $\bar{A}_{kl}$ என்ற உருப்படிகளாக

$$\bar{A}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} A^{ij} \qquad \ldots\ldots(27.2)$$

என்ற மாற்றுரு விதியின்படி மாறினால் A_{ij} என்பன ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புருவின் கூறுகள் ஆகும்.

(3) மேலும் A^i_j என்ற N^2 உருப்படிகள்,

$$\bar{A}^k_l = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} A^i_j \quad \text{......(27.3)}$$

என்றவிதிப்படி மாறினால் A^i_j என்பன ஓர் இரண்டாம் அடைவு கலப்புப் பண்பு (mixed tensor) வின் கூறுகள் ஆகும்.

குறிப்பு: மேற்கூறிய விதி 27.3-ல் முரண்மாறித் தன்மை மேற்குறியுடனும், உடன்மாறித் தன்மை கீழ்க்குறியுடனும் தொடர்புபடுத்தப் பட்டுள்ளதை கவனிக்கவும்.

28. உயர் அடைவுப் பண்புக்கள் (Higher Order Tensors)

இனி, முரண்மாறி, உடன் மாறித் தன்மைகளுக்கு நாம் ஏற்றுக்கொண்ட மரபுகளையொட்டி உயர் அடைவு அல்லது உயர்தகு நிலைப் பண்புருக்களை வரையறை செய்யலாம். இது இரண்டாம் தகுநிலைப் பண்புருக்களின் வரையறைகளின் நீட்சியே ஆகும்.

எடுத்துக் காட்டுகள்

1. $$\bar{A}^{ijk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n} A^{lmn} \text{ என்பது} \quad \text{......(28.1)}$$

A^{lmn} என்ற மூன்றும் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புருவின் மாற்றுரு விதியாகும்.

2. $$\bar{A}_{ijkl} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} A_{pqrs} \quad \text{...(28.2)}$$

என்பது A_{pqrs} என்ற நான்காம் தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புருவை வரையறை செய்கின்றது.

3. $$\bar{A}^{ij}_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} A^{lm}_n \quad \text{......(28.3)}$$

என்பது A^{lm}_n என்ற மூன்றும் அடைவுக் கலப்புப் பண்புருவை வரையறை செய்கின்றது. இது முரண்மாறித் தன்மையில் இரண்டாம் அடைவும், உடன்மாறித் தன்மையில் முதல் அடைவும் பெற்ற பண்புரு.

4. இனி ஒரு பொது விதியினை வரையறை செய்வோமாக.

$A^{p_1 p_2 p_3 \cdots\cdots p_r}_{q_1 q_2 q_3 \cdots\cdots q_s}$ என்பன x^i ச் சார்ந்த $N^{(r+s)}$ உருப்படிகளாக இருக்கட்டும்.

$$\overline{A}^{i_1 i_2 \ldots\ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots\ldots j_s} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}} \cdot \frac{\partial \overline{x}^{i_2}}{\partial x^{p_2}} - \frac{\partial \overline{x}^{i_r}}{\partial x^{p^r}} \cdot \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}} \cdot$$

$$\frac{\partial x^{q_2}}{\partial \overline{x}^{j_2}} - \frac{\partial x^{q^s}}{\partial \overline{x}^{j_s}} A^{p_1 p_2 \ldots\ldots p_r}_{q_1 q_2 \ldots\ldots q_s} \qquad \ldots\ldots(28.4)$$

என்ற மாற்றுருவிதிப்படி அவை மாறினால் அந்த உருப்படிகளை $(r+s)$-ம் அடைவுக் கலப்புப் பண்புருவின் கூறுகள் எனக் கூறுகிறோம். இது r-ம் அடைவு முரண்டை மாறித் தன்மையும், s-ம் அடைவு உடன்மாறித் தன்மையும் பெற்றது.

சமன்பாடு 28.4 பார்வைக்குச் சிக்கலானதாகத் தோன்றினாலும், அது முரண்மாறி, உடன்மாறி சுட்டிணைப்புகளின் கூட்டமைப்பு என்பதைப் புரிந்து கொண்டால் மிக எளிதில் எழுதி விடலாம்.

5. நாம் உயர் தகுநிலைப் பண்புருக்களை வரையறை செய்யும் பொழுது ஒவ்வொரு தகுநிலை உயரும் பொழுதும் ஒரு சுட்டிணைப்பையும், ஒரு பகுதிவகைக் கெழுக்காரணியையும் சேர்த்து அமைத்தோம். இனி பின்னோக்கிச் சென்றால் குறைக்க வேண்டும் A_i என்ற முதல் தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புருவை எடுத்துக் கொண்டு ஒரு தகுநிலையைக் குறைத்தால்,

$\overline{A} = A$ எனக் கிடைக்கிறது. அதாவது A என்பது ஒரு அளவி அல்லது மாற்றமிலி ஆகிறது. எனவே மாற்றமிலியை பூச்சிய அடைவுப் பண்புரு (Zero order tensor) அல்லது பூச்சியத் தகுநிலைப் பண்புரு (tensor of rank zero) எனக் கொள்ளலாம். எனவே ஓர் அளவி என்பது பூச்சிய அடைவுப் பண்புரு ஆகும்.

ஒரு முதல் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புருவை எடுத்துக் கொண்டு ஒரு தகுநிலையைக் குறைத்தாலும் மேற்கண்ட முடிவையே பெறுவோம். எனவே பூச்சியத் தகுநிலையில் முரண்மாறி, உடன்மாறி வேறுபாடுகள் இல்லை.

29. சில முடிவுகள்

முடிவு 1 : $\overline{A}^j = \dfrac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} A^i$ ஆனால் $A^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} \overline{A}^j$

$$\overline{A}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} A^i \qquad \ldots\ldots(29.1)$$

என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ACC. No. 4522

$\dfrac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}$ ஆல் இரு பக்கங்களேயும் பெருக்க,

$$\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\ \bar{A}^j = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} A^i$$

$$= \delta^l_i\ A^i \text{ (21.4-ஐ பார்க்க)}$$

$$= A^l \qquad \text{(21.2-ன் படி)}$$

எனவே $$A^l = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\ \bar{A}^j$$

அதாவது $$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\ \bar{A}^j \qquad \ldots\ldots(29.2)$$

குறிப்பு : 29.2 என்பதும் முரண்மாறி மாற்றுருவிதியே.

முடிவு 2 : $\bar{A}_j = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} A_i$ எனில் $A_i = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\ \bar{A}_j$

முடிவு -1ன் நிரூபணத்தின் முறையை யொட்டியே, கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களேயும் $\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}$ ஆல் பெருக்கி, இதை நிரூபிக்கலாம்.

விவரமான நிரூபணத்தைக் கற்போர் எழுதிப் பயன் பெறுக.

முடிவு 3 : δ^i_j என்பது இரண்டாம் தகுநிலைக் கலப்புப் பண்புரு ஆகும்.

நிரூபணம் :

$\dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\ \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\ \delta^i_j$ என்பதை எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\ \delta^i_j = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^q} \qquad \text{(21.2-ன்படி)}$$

$$= \delta^p_q \qquad \text{(21.4-ன்படி)}$$

ஆனல் $$\delta^p_q = \bar{\delta}^p_q \text{ ஏனெனில் } \bar{\delta}^p_q = \begin{cases} 1, & p = q \text{ எனின்} \\ 0, & p \neq o \text{ எனின்} \end{cases}$$

எனவே $$\bar{\delta}^p_q = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p}\ \delta^i_j$$

ஆக, δ^i_j என்பது முரண்மாறியில் ஓர் அடைவும், உடன் மாறியில் ஓர் அடைவும் உள்ள ஒரு கலப்புப் பண்புரு.

குறிப்பு : δ^i_j ன் இந்தத் தன்மையைக் கருதியே க்ரோனகர் டெல்டாவினை ஒரு மேற்குறியுடனும். ஒரு கீழ்க்குறியுடனும் அறிமுகப்படுத்தினோம்.

முடிவு 4 : ஒரு புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு பண்புருவின் கூறுகள் ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில் பூச்சியங்களானால், அந்தப் புள்ளியில் அதன் கூறுகள் எல்லா இலக்கெண் அமைப்புகளிலும் பூச்சியங்களாகின்றன.

நிரூபணம் :

A^i என்பன $P(x^i)$ என்ற புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு முரண்மாறிப் பண்புருவின் கூறுகளாக இருக்கட்டும். இலக்கெண் நிலைமாற்றத்திற்குப் பிறகு x^i என்பன $\bar{x}^j$ ஆகவும் A^i என்பன $\bar{A}^j$ ஆகவும் மாறட்டும்.

$$\text{எனவே } \bar{A}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} A^i$$

P என்ற புள்ளியில் A^i என்பன பூச்சியங்களானால் $\bar{A}^j$ என்பன பூச்சியங்கள் என்பது தெளிவு.

ஒரு முதல் தகுநிலைப் பண்புருவை எடுத்துக்கொண்டு மேற்கண்ட முடிவை நிரூபித்துள்ளோம். இதே போன்ற நிரூபணத்தை எல்லாவகைப் பண்புருக்களுக்கும் எளிதில் எழுதலாம். எனவே முடிவு 4 எல்லாப் பண்புருக்களுக்கும் பொருந்தும்.

முடிவு 5 : b^i, a^i_m என்பன மாறிலிகளாகவும் (பண்புருக்களாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை), $a^i_r a^i_m = \delta^r_m$ ஆகவும் இருந்தால்

$\bar{x}^i = a^i_m x^m + b^i$ என்ற இலக்கெண் நிலைமாற்றத்தின் கீழ் முரண்மாறி, உடன்மாறிப் பண்புருக்கள் ஒரே தன்மைத்தன.

நிரூபணம் :

$$\bar{x}^i = a^i_m x^m + b^i \qquad \ldots\ldots(29.3)$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பு.

x^m ஐ பொருத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} = a^i_m \qquad \ldots\ldots(29.4)$$

இனி 29.3 ஐ இருபக்கங்களிலும் a^i_r ஆல் பெருக்கி, i என்ற சுட்டிணைப்பின் மதிப்புகளை 1 லிருந்து N வரை கூட்ட

$$a^i_r \bar{x}^i = a^i_r a^i_m x^m + a^i_r b^i$$

$$a^i_r \bar{x}^i = \delta^r_m x^m + a^i_r b^i$$

$$= x^r + a^i_r b^i$$

எனவே $$x^r = a^i_r \bar{x}^i - a^i_r b^i$$

அதாவது $$x^m = a^i_m \bar{x}^i - a^i_r b^i$$

இப்பொழுது $\bar{x}^i$ பொருத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} = a^i_m \qquad \ldots\ldots\ldots(29.5)$$

(29.4), (29.5) இவற்றிலிருந்து

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}.$$

எனவே 29.3ல் கொடுக்கப்பட்ட நிலைமாற்றத்தைப் பொருத்த வரை முரண்மாறி, உடன்மாறிப் பண்புருக்கள் ஒரே தன்மைத்தன.

குறிப்பு : முதல் தகுநிலை, இரண்டாம் தகுநிலைப் பண்புருக்களின் மாற்றுரு விதிகளை அணிக் குறியீட்டால் (matrix notation) பின் வருமாறு விரித்து எழுதலாம்.

எடுத்துக் காட்டு 1. $N = 3$ எனக் கொள்க.

மாற்றுருவிதி, $\bar{A}_i = \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j$ என்பதை விரித்து

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

என்றோ அல்லது

$$(\bar{A}_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3) = (A_1\ A_2\ A_3) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

என்றே எழுதலாம்.

2. மாற்றுரு விதி $\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl}$

என்பதனை விரித்து

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13} \\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23} \\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^{11} & \bar{A}^{12} & \bar{A}^{13} \\ \bar{A}^{21} & \bar{A}^{22} & \bar{A}^{23} \\ \bar{A}^{31} & \bar{A}^{32} & \bar{A}^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

என எழுதலாம்.

$N>3$ ஆக இருக்கும்போது மேற்கண்ட முறையை நீட்டி, தகுந்த அணி சமன்பாட்டை எழுதலாம்.

ஆனால் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட தகுநிலை உடைய உயர் அடைவுப் பண்புருக்களை அணிக்குறியீட்டு முறையில் குறிக்க இயலாது.

30. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் மாற்றுரு விதிகளை எழுதுக.

(i) A^{ij}_{k} (ii) A^{lmn}_{pq} (iii) B^{m}_{pq}

விடை

(i) $\bar{A}^{pq}_{r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} A^{ij}_{k}$

(ii) $\bar{A}^{ijk}_{rs} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^s} A^{lmn}_{pq}$

(iii) $\bar{B}^{i}_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} B^{m}_{pq}$

குறிப்பு: இடது பக்கப் பண்புருவின் சுட்டிணைப்புகளின் நிலைகள் வலது பக்கத்திலும் மாறுதிருக்கிறது; அதாவது மேற்குறிகள் மேலேயும், கீழ்க்குறிகள் கீழேயும் பகுதி வகைக் கெழுக்களில் காணப்படுகின்றன என்பதைக் கவனித்து உணர்ந்து கொண்டால் மாற்றுரு விதிகளை எளிதில் எழுதிவிட முடியும்.

2. $A\ (i, j, k, l)$ என்ற x^i அமைப்பைச் சார்ந்த உருப்படி $\bar{x}^i$ இலக்கெண் அமைப்பில் கீழ்க்கண்ட விதிப்படி மாறுகிறது.

$$\bar{A}_{(p, q, r, s)} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} A\ (i, j, k, l)$$

(i) அந்த உருப்படி ஒரு பண்புருவா?

(ii) அவ்வாறாயின் அதனைக் குறியீட்டு மரபின்படி குறிக்க.

விடை:

(i) ஆம்

(ii) A^{jk}_{il} இது ஒரு நான்காம் அடைவுக் கலப்புப் பண்புரு.

31. சமச்சீர்ப் பண்புருக்கள்

A^{ij} என்ற பண்புருவின கூறுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். A^{12} என்ற கூறு பொதுவாக A^{21} என்ற கூறுக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. இதுவே போன்று A^{ji} என்பதின் கூறுகள் A^{ij}-ன் கூறுகளுக்கு அதே வரிசையில் சமமாக இருக்க வேண்டுவதில்லை. i, j என்பனவற்றின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அவ்வாறு $A^{ij} = A^{ji}$ ஆக இருந்தால் அந்தப் பண்புருவை சமச்சீர் முரண்மாறிப் பண்புரு எனச் சொல்கிறோம்.

வரையறை: இரு உடன்மாறி அல்லது இரு முரண்மாறிச் சுட்டிணைப்புகளை இட பரிமாற்றம் செய்யும்பொழுது ஒரு

பண்புருவின் கூறுகள் மாறுமலிருந்தால் அந்தப் பண்புருவை அவ்விரு சுட்டிணைப்புகளில் சமச்சீர் (Symmetry) உடையது என்று சொல்கிறோம்.

எ-கா.

(i) $A_{ij} = A_{ij}$ (i, j களில் சமச்சீர்)

(ii) $A^{ijk}_{mn} = A^{ikj}_{mn}$ (k, j களில் சமச்சீர்)

(iii) $A^{k}_{mn} = A^{k}_{nm}$ (m, n களில் சமச்சீர்)

(iv) $\left.\begin{array}{l} A^{ij}_{mn} = A^{ji}_{mn} \\ A^{ij}_{mn} = A^{ij}_{nm} \end{array}\right\}$ (i, j களிலும், m, n களிலும் சமச்சீர்)

தேற்றம்: ஒரு பண்புருவின் சமச்சீர்த் தன்மை இலக்கெண் நிலைமாற்றத்தினுல் எவ்விதமாறுதலும் அடைவதில்லை.

அதாவது ஒரு பண்புரு இரு சுட்டிணைப்புகளில் சமச்சீருடைய தாக இருப்பதால் இலக்கெண் மாற்றத்திற்குப் பின்பும் அதே இரு சுட்டிணைப்புக்களில் சமச்சீருடையதாக இருக்கும்.

நிரூபணம்: A^{ij} என்ற முரண்மாறிப் பண்புருவை எடுத்துக் கொண்டு தேற்றத்தை நிரூபிக்கிறோம். ஒரு குறிப்பிட்ட பண் புருவை எடுத்துக்கொண்டு நிரூபிப்பதால் நிரூபணத்தின் பொதுத் தன்மை மாறுவதில்லை. எந்தவொரு பண்புருவிற்கும் இதே போன்ற நிரூபணத்தை எழுதிக்கொள்ளலாம்.

A^{ij} என்பது i, j களில் சமச்சீர் உடையது எனக் கொள்க.
எனவே $A^{ij} = A^{ji}$ ......(31.1)

வரையறையின்படி ($\bar{x}^i$ அமைப்புக்கு மாற்றும் போது)

$$\bar{A}^{mn} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} A^{ij}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} A^{ij}$$ [∵ வகைக்கெழுவின் பெருக்கற் பலன் மாற்றுவிதிக்குட்பட்டது.)

$$= \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} A^{ji}$$ [31.1-ன்படி]

$$= \bar{A}^{nm}$$ (வரயறைப்படி)

இதுவே வேண்டிய முடிவு.

குறிப்பு: ஒன்று முரண்மாறியாகவும், மற்றது உடன்மாறியாகவும் உள்ள இரு சுட்டிணைப்புகளில் சமச்சீர் தன்மையை நாம் வரையறை செய்வதில்லை. ஏனெனில் அத்தகைய சமச்சீர் தன்மை ஓர் இலக்கெண் மாற்றத்தின்போது பொதுவாக மாறாதிருப்பதில்லை. ஆனால் க்ரோனகர் டெல்டா இந்த விதிக்கு விலக்கு. இது மேற்சொன்ன சமச்சீரைப் பெற்ற ஒரு கலப்புப் பண்புரு.

வரையறை: எல்லாச் சுட்டிணைப்புகளிலும் அதாவது ஒவ்வொரு இணை உடன்மாறி அல்லது முரண்மாறிச் சுட்டிணைப்புகளிலும் ஒரு பண்புரு சமச்சீர் உடையதாக இருந்தால், அதைச் சுருக்கமாக **சமச்சீர்ப் பண்புரு** என்கிறோம்.

32. எதிர்ச்சீர் பண்புருக்கள் (Skew Symmetric tensors)

வரையறை: இரு உடன்மாறி அல்லது இரு முரண்மாறி சுட்டிணைப்புகளை இடம் பரிமாற்றம் செய்யும்பொழுது ஒரு பண்புருவின் கூறுகள் குறி மாறினால் அந்தப் பண்புருவை அவ்விரு சுட்டிணைப்புகளில் **எதிர்ச்சீர் (Skew-Symmetry)** உடையது என்று சொல்கிறோம்.

(எ-கா)

(i) $A^{ij} = -A^{ji}$ (i, jகளில் எதிர்ச்சீர்)

(ii) $A^{mnp}_{qr} = -A^{mpn}_{qr}$ (n, p களில் எதிர்ச்சீர்)

(iii) $A^{kl}_{mn} = -A^{kl}_{nm}$ (m, n களில் எதிர்ச்சீர்)

தேற்றம்: ஒரு பண்புருவின் எதிர்ச்சீர்த் தன்மை இலக்கெண் நிலைமாற்றத்தினால் எவ்வித மாறுதலும் அடைவதில்லை.

நிரூபணம்: A^{ij} என்ற முரண்மாறிப் பண்புருவை எடுத்துக் கொண்டு இதை நிரூபிக்கிறோம். இதனால் நிரூபணத்தின் பொதுத் தன்மை பாதிக்கப்படுவதில்லை.

A^{ij} என்பது எதிர்ச்சீர் உடையது என்க.

எனவே $A^{ij} = -A^{ji}$ ......(32.1)

$\bar{x}^i$ அமைப்புக்கு மாற்றும்பொழுது

$$\bar{A}^{mn}=\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j}A^{ij} \text{ (வரையறைப்படி)}$$

$$=\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i}A^{ij} \text{ [∵ வகைக்கெழுக்களின் மாற்றுவிதிப்படி]}$$

$$=\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i}(-A^{ji}) \text{ (32.1-ன் படி)}$$

$$=-\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i}A^{ij}$$

$$=-\bar{A}^{nm} \text{ (வரையறைப்படி)}$$

இதுவே தேவையான முடிவு.

குறிப்பு: சமச்சீரைப் போன்றே, எதிர்ச்சீர்த் தன்மையையும் ஓர் உடன்மாறி, ஒரு முரண்மாறிச் சுட்டிணைப்புகளில் வரையறை செய்வதில்லை.

வரையறை: எல்லாச் சுட்டிணைப்புகளிலும் அதாவது ஒவ்வொரு இணை உடன்மாறி அல்லது முரண்மாறிச் சுட்டிணைப்புகளிலும் ஒரு பண்புரு எதிர்ச்சீர் உடையதாக இருந்தால் அதைச் சுருக்கமாக எதிர்ச்சீர் பண்புரு (Skew-symmetric tensor) என்கிறோம்.

முடிவு 1: N பரிமாணத்தில் ஓர் இரண்டாம் அடைவு சமச்சீர்ப் பண்புருவில் உச்ச அளவாக $\frac{1}{2}N(N+1)$ வேறுபட்ட கூறுகள் உள்ளன.

நிரூபணம்: A_{ij} என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை சமச்சீர் பண்புருவாக இருக்கட்டும்.
எனவே $A_{ij}=A_{ji}$

N-பரிமாணத்தில் A_{ij}-ல் N^2 கூறுகள் உள்ளன. இவற்றில் சுட்டிணைப்புகள் சமமான மதிப்புகளை ஏற்கும் போது வரும் A_{11}, A_{22}......A_{NN} என்ற N கூறுகள் உள்ளன. எஞ்சிய N^2-N கூறுகள் $\frac{1}{2}(N^2-N)$ சமமதிப்புள்ள இணைகளாகப் பிரிகின்றன. எனவே வேறுபட்ட தனிக் கூறுகளின் மொத்தம் $=N+\frac{1}{2}(N^2-N)$

$$\tfrac{1}{2}(N^2+N)$$

$$\tfrac{1}{2}N(N+1)$$

முடிவு 2: N பரிமாணத்தில், ஓர் இரண்டாம் அடைவு எதிர்ச் சீர்ப் பண்புருவில் உச்ச அளவாக $\frac{1}{2}N(N-1)$ வேறுபட்ட குறிச் சார்பிலாக் கூறுகள் உள்ளன.

நிருபணம்: A_{ij} என்பது ஓர் எதிர்ச்சீர் பண்புருவாக இருக்கட்டும்.

$$A_{ij}=-A_{ji}$$

$A_{11}=-A_{11}$, $A_{22}=-A_{22}$............என்பதால் இதன் கூறுகளில் A_{11}, A_{22}........A_{NN} என்ற N கூறுகள் பூச்சியமாகின்றன.

எஞ்சிய N^2-N கூறுகள் $\frac{1}{2}(N^2-N)$ இணைகளாகப் பிரிகின்றன. ஒவ்வொரு இணையிலும் கூறுகளின் மதிப்புகள் சமம். ஆனால் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்குறியுடையன. குறிச்சார்பிலாது பார்த்தால் அவை $\frac{1}{2}(N^2-N)$ வேறுபட்ட கூறுகள் ஆகின்றன. எனவே எடுத்துக் கொண்ட பண்புருவில்

$\frac{1}{2}(N^2-N)=\frac{1}{2}N(N-1)$ வேறுபட்ட குறிச்சார்பிலாக் கூறுகள் உள்ளன.

கணக்கு

A_{ij} என்பது ஓர் எதிர்ச்சீர் பண்புருவாயின்

$$\left(\delta^i_j\ \delta^k_l+\delta^i_l\ \delta^k_j\right)A_{ik}=0 \text{ என நிருபி.}$$

$$\text{இ.ப.}=\left(\delta^i_j\ \delta^k_l+\delta^i_l\ \delta^k_j\right)A_{ik}$$

$$=\delta^i_j\delta^k_l\ A_{ik}+\delta^i_l\delta^k_j\ A_{ik}$$

$$=\delta^i_j\ A_{il}+\delta^i_l\ A_{ij}$$

$$=A_{jl}+A_{lj}$$

$$=A_{jl}-A_{jl}\ (\because A_{ij} \text{ எதிர்ச்சீர் உள்ளது})$$

$$=0.$$

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்டவற்றின் மாற்றுரு விதிகளை எழுதுக:

(i) A^p_{qr} (ii) B^{lm}_{pqr} (iii) C^{ij}_{kl}

2. $A\ (p, q, r)$ என்ற x^i அமைப்பைச் சார்ந்த உருப்படி $\bar{x}^i$ என்ற அமைப்பில் கீழ்க்கண்ட விதிப்படி மாறுகின்றது :

$$\bar{A}\ (i, j, k) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\ A\ (p, q, r)$$

(i) அது ஒரு பண்புருவா ?

(ii) அவ்வாறெனில் அதன் வழக்கமான குறியீடு யாது ?

3. $A\ (i, j, k, l)$ என்ற x^i அமைப்பைச் சார்ந்த உருப்படி $\bar{x}^i$ என்ற அமைப்பில்

$$\bar{A}\ (p, q, r, s) = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} A\ (i, j, k, l)$$

என மாறுகின்றது. அது பண்புருவாயின் வழக்கமான குறியீட்டில் எழுதுக.

4. $\bar{A}^m_n = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} A^i_j$ ஆனால்

$$A^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m} \cdot \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \bar{A}^m_n$$ என நிரூபி.

5. $\left(\delta^i_j\ \delta^k_l - \delta^i_l\ \delta^k_j \right) A_{ik} = 0$ ஆனால்

A_{ij} என்பது ஒரு சமச்சீர் பண்புரு என நிரூபி.

5. பண்புரு இயற்கணிதம்
(Tensor algebra)

இந்த அதிகாரத்தில் பண்புருக்கள் மேல் செயல்படுத்தப்படும் சில அடிப்படை இயற்கணித செயல்களை (**fundamental algebraic operations**) வரையறை செய்கிறோம். இவ்வரையறைகளின் உதவி கொண்டு, கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களிலிருந்து புதுப்பண் புருக்களை உருவாக்குகிறோம்.

இந்த அதிகாரத்தில் கொடுக்கப்பட்ட தேற்றங்களும் நிரூபணங்களும் குறிப்பிட்ட சில பண்புருக்களைக் குறித்தே தரப் பட்டிருந்தாலும் நிரூபணங்களின் பொதுத் தன்மையைக் கருதி அவை எல்லாப் பண்புருக்களுக்கும் பொருந்தும் என எளிதில் உணரலாம்.

33. பண்புருக்களின் கூட்டல் (Addition of tensors)

தேற்றம் : A^{ij}_{k}, B^{ij}_{k} என்பன ஒரே அடைவும் ஒரே தன்மையும் உடைய இரு பண்புருக்கள் எனில் $A^{ij}_{k} + B^{ij}_{k}$ என்பது அதே அடைவும் அதே தன்மையும் உடைய பண்புருவாகும்.

நிரூபணம் : A^{ij}_{k}, B^{ij}_{k} என்பன x^i அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்ட இரு பண்புருக்களின் கூறுகளாக இருக்கட்டும். $\bar{x}^i$ அமைப்பில் அவற்றின் கூறுகள் முறையே $\bar{A}^{pq}_{r}$, $\bar{B}^{pq}_{r}$ ஆக இருக்கட்டும்.

எனவே,

$$\bar{A}^{pq}_{r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \; A^{ij}_{k} \qquad \text{......(33.1)}$$

$$\bar{B}^{pq}_{r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \; B^{ij}_{k} \qquad \text{......(33.2)}$$

இவற்றைக் கூட்ட.

$$\overline{A}_{r}^{pq} + \overline{B}_{r}^{pq} = \frac{\partial \overline{x}^{p}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial \overline{x}^{q}}{\partial x^{j}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial \overline{x}^{r}} \left(A_{k}^{ij} + \overline{B}_{k}^{ij} \right) \ldots\ldots(33.3)$$

33.3-ல் கொடுக்கப்பட்ட மாற்றுருவிதிப்படி $A_{k}^{ij} + B_{k}^{ij}$ என்பது முரண்மாறி அடைவு இரண்டும் உடன்மாறி அடைவு ஒன்றும் உள்ள கலப்புப் பண்புரு. எனவே அதை C_{k}^{ij} எனக் குறிக்கலாம். அதாவது அது கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்கள் போன்று அதே அடைவும் தன்மையும் கொண்ட பண்புரு.

33.3-ல் $A_{k}^{ij} + B_{k}^{ij} = C_{k}^{ij}$ எனவும்

$\overline{A}_{r}^{pq} + \overline{B}_{r}^{pq} = \overline{C}_{r}^{pq}$ எனவும் பிரதியிட்டால்

$\overline{C}_{r}^{pq} = \frac{\partial \overline{x}^{p}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial \overline{x}^{q}}{\partial x^{j}} \cdot \frac{\partial x^{k}}{\partial \overline{x}^{r}} \cdot C_{k}^{ij}$ என்றாகிறது.

வரையறை : இந்த முறையினுல் உண்டாக்கப்பட்ட $C_{k}^{ij} = A_{k}^{ij} + B_{k}^{ij}$ என்ற புதுப் பண்புருவை கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களில் கூட்டுத்தொகை என்கிறோம். இம்முறையின் செயலைப் பண்புருக்களின் கூட்டல் என்கிறோம்.

குறிப்பு : வெவ்வேறு அடைவுகளும் தன்மைகளும் கொண்ட பண்புருக்களால் உண்டாக்கப்பட்ட $A_{ij} + B_{i}$ போன்ற கோவைகள் பண்புருக்கள் ஆகா; ஏனெனில் அவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட கோவைகள் பண்புரு மாற்றுரு விதிக்குக் கட்டுப்படாதவை. எனவே வெவ்வேறு அடைவுகளும் தன்மைகளும் கொண்ட பண்புருக்களின் கூட்டுத் தொகையை நாம் வரையறை செய்வதில்லை.

முடிவு : பண்புருக்களின் கூட்டல், மாற்று விதிக்கும், சேர்ப்பு விதிக்கும் கட்டுப்பட்டது (commutative and associative).

இதை மிக எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

34. பண்புருக்களின் கழித்தல் (Difference of Tensors)

தேற்றம் : A_{k}^{ij}, B_{k}^{ij} என்பன ஒரே அடைவும் ஒரே தன்மையும் உடைய இரு பண்புருக்கள் ஆனுல் $A_{k}^{ij} - B_{k}^{ij}$ என்பது அதே அடைவும் அதே தன்மையும் உடைய பண்புருவாகும்.

நிருபணம் : A^{ij}_{k}, B^{ij}_{k} என்பன x^i அமைப்பில் உள்ள இரு பண்புருக்களின் கூறுகளாக இருக்கட்டும். $\bar{x}^i$ அமைப்பில் அவற்றின் கூறுகள் முறையே $\bar{A}^{pq}_{r}$, $\bar{B}^{pq}_{r}$ என இருக்கட்டும்.

$$\bar{A}^{pq}_{r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \; A^{ij}_{k} \qquad \ldots\ldots(34.1)$$

$$\bar{B}^{pq}_{r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \; B^{ij}_{k} \qquad \ldots\ldots(34.2)$$

(34.1)—(34.2) ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\bar{A}^{pq}_{r} - \bar{B}^{pq}_{r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} \left(A^{ij}_{k} - B^{ij}_{k} \right) \ldots\ldots(34.3)$$

34.3 ன்படி $A^{ij}_{k} - B^{ij}_{k}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களைப் போன்று அதே அடைவும் அதே தன்மையும் கொண்ட பண்புரு. அதனை D^{ij}_{k} என குறிக்கலாம்.

வரையறை : இவ்வாறு உண்டாக்கப்பட்ட D^{ij}_{k} என்ற புதுப் பண்புருவை கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களின் கழித்தலினால் வரும் மீதி என்கிறோம்.

தேற்றம் : எந்தவொரு இரண்டாம் அடைவு உடன்மாறி அல்லது முரண்மாறிப் பண்புருவையும் ஒரு சமச்சீர், ஓர் எதிர்ச்சீர் பண்புருக்களின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாம்.

நிருபணம் : A^{ij} என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புரு என்க.

$$\text{இனி,} \quad A^{ij} = \tfrac{1}{2}\,[A^{ij} + A^{ij}] + \tfrac{1}{2}\,[A^{ij} - A^{ij}]$$
$$= B^{ij} + C^{ij}$$

என எழுதலாம்.

$$B^{ij} = \tfrac{1}{2}\,[A^{ij} + A^{ji}] = \tfrac{1}{2}[A^{ji} + A^{ij}] \; [\text{கூட்டலின் மாற்று விதியால்}]$$
$$= B^{ij}$$

எனவே B^{ij} என்பது i, j க்களில் சமச்சீர் உடையது.

மேலும்,
$$C^{ij} = \tfrac{1}{2}\,[A^{ij} - A^{ji}]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,[A^{ji} - A^{ij}]$$
$$= -C^{ji}$$

∵ C^{ij} என்பது எதிர்ச்சீர் உடையது. எனவே A^{ij} என்பதை ஒரு சமச்சீர், ஓர் எதிர்ச்சீர் பண்புருக்களின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாம்.

தேற்றம் : இரண்டாம் அல்லது அதற்கு மேல் அடைவு உள்ள எந்தவொரு பண்புருவையும் இரு பண்புருக்களின் கூட்டுத் தொகையாக எழுதலாம். அவற்றில் ஒன்று ஓர் இணை உடன் மாறி அல்லது முரண்மாறிச் சுட்டிணைப்புகளில் சமச்சீர் உடையது ; மற்றது அதே சுட்டிணைப்புகளில் எதிர்ச்சீர் உடையது.

நிரூபணம் : முந்தைய தேற்றத்தின் நிரூபணத்தை நீட்டி இதை நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு : மேற்சொன்ன இரு தேற்றங்களின் முடிவுகள், பண்புருக்களின் பயன்பாட்டில் சிறப்பிடம் வகிக்கின்றன.

35. பண்புருக்களின் பெருக்கல்

இப்பொழுது நாம் பண்புருக்களின் பெருக்கலை எடுத்துக் கொள்வோம். பண்புருக்களைக் கூட்டவோ, கழிக்கவோ செய்யும் பொழுது, நாம் ஒரே தன்மையுடைய பண்புருக்களை எடுத்துக் கொண்டு ஒரே மாதிரியான சுட்டிணைப்புகளைக் கூட்டவோ, கழிக்கவோ செய்தோம். பெருக்கலில் இந்தக்கட்டுப்பாடு கிடையாது. ஆயினும் “ஒரே மட்டத்தில் ஒரே மாதிரியான சுட்டிணைப்புகளைக் கொண்ட இரு கூறுகளைப் பெருக்கக் கூடாது” என்ற கட்டுப்பாடு உண்டு. பண்புருக்களின் கூட்டல், பெருக்கல் பலன்களும் பண்புருக்களாக இருப்பதற்காகவே இந்தக் கட்டுப் பாடுகளை ஏற்கிறோம். மேற்சொன்ன கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்பட்டு வேறுபட்ட தன்மைகளும், வேறுபட்ட சுட்டிணைப்பு களும் உள்ள இரு பண்புருக்களைப் பெருக்கலாம். பெருக்கற்பலனை சுட்டிணைப்புகளை அதே நிலைகளில் எழுதிக் குறிப்பிடுகிறோம்.

தேற்றம் : A^{ij}_{k}, B^{p}_{q} என்பன சுட்டிணைப்புகளால் சுட்டப்பட்ட தன்மைகள் உடைய இரு பண்புருக்கள் ஆனால் $A^{ij}_{k}\, B^{p}_{q}$ என்பது முரண்மாறி அடைவு 3, உடன்மாறி அடைவு 2-ம் கொண்ட பண்புருவாகும்.

நிருபணம் : $A^{ij}_k\ B^p_q$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட இரு பண்புருக்களும் x^i அமைப்பைச் சார்ந்தனவாக இருக்கட்டும்.

$\bar{x}^i$ அமைப்பில் $\bar{A}^{lm}_n$, $\bar{B}^r_s$ என்பன அவற்றின் கூறுகளாக இருக்கட்டும்.

ஆக
$$\bar{A}^{lm}_n = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\ A^{ij}_k \qquad \ldots\ldots(35.1)$$

$$\bar{B}^r_s = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^s}\ B^p_q \qquad \ldots\ldots(35.2)$$

இரண்டையும் பெருக்க,

$$\bar{A}^{lm}_n\ \bar{B}^r_s = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \cdot \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^s}\ A^{ij}_k\ B^p_q \qquad \ldots\ldots(35.3)$$

35.3 என்பது i, j, p களில் முரண்மாறித் தன்மையும், k, q களில் உடன்மாறித் தன்மையும் கொண்ட ஒரு பண்புருவின் மாற்றுரு விதியாகும். எனவே $A^{ij}_k\ B^p_q$ என்பது முரண்மாறி அடைவு 3-ம், உடன்மாறி அடைவு இரண்டும் உள்ள ஒரு பண்புரு. அதனை C^{ijp}_{kq} எனவும் குறிக்கலாம்.

குறிப்பு 1 : இவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட $A^{ij}_k\ B^p_q$ என்ற புதுப்பண்புருவை A^{ij}_k, B^p_q என்பனவற்றின் **புறப் பெருக்கற்பலன்** (outer product) அல்லது சுருக்கமாக **பெருக்கற்பலன்** என்கிறோம்.

இந்தப் புதுப்பண்புருவை உண்டாக்கும் செயலை **புறப் பெருக்கல்** (outer multiplication) என்கிறோம்.

குறிப்பு 2 : இரண்டு பண்புருக்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரு பண்புருவாகும். இருப்பினும், ஒவ்வொரு பண்புருவையும் கீழ்த்தகு நிலை கொண்ட இரு பண்புருக்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுத முடியாது. இக்காரணம் கருதியே வழக்கமான பொருளில் ஒரு பண்புருவை மற்றொரு பண்புருவால் வகுப்பது என்ற **வகுத்தலை** (division) நாம் வரையறை செய்யவில்லை.

முடிவு 1 : பண்புருக்களின் பெருக்கல் மாற்று **விதிக்கும்**, சேர்ப்பு விதிக்கும் கட்டுப்பட்டது.

நிருபணம் : இதை எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

முடிவு 2 : A^i, B^j என்பன இரு முரண்மாறி வெக்டர்களானல் A^i B^j என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புருவாகும்.

நிருபணம் : A^i B^j என்பன x^i அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களாக இருக்கட்டும். $\bar{x}^i$ அமைப்பில் அவற்றின் கூறுகள் $\bar{A}^l$, $\bar{B}^m$ என இருக்கட்டும்

எனவே
$$\bar{A}^l = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} A^i$$

$$\bar{B}^m = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} B^j$$

இவற்றைப் பெருக்க
$$\bar{A}^l \ \bar{B}^m = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \ A^i \ B^j$$

எனவே இந்த மாற்றுரு விதிப்படி A^i B^j என்பது ஓர் இரண்டாம் தகு நிலை முரண்மாறிப் பண்புரு,

குறிப்பு : இது போலவே, A_i, B_j என்பன இரு உடன்மாறி வெக்டர்களானல் A_i B_j என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புரு ஆகும்.

அடுத்து, A^i , B_j என்பன முறையே முரண்மாறி, உடன்மாறி வெக்டர்களானல் A^i B_j என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலைக் கலப்புப் பண்புரு ஆகும்.

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, A என்பது m-வது அடைவு முரண்மாறித் தன்மையும் n-வது அடைவு உடன் மாறித் தன்மை யும் உடைய பண்புருவாகவும் B என்பது p-வது அடைவு முரண் மாறித் தன்மையும், q-வது அடைவு உடன்மாறித் தன்மையும் உண்டய பண்புருவாகவும் இருந்தால் AB என்பது $(m+p)$-வது அடைவு முரண்மாறித் தன்மையும், $(n+q)$-வது அடைவு உடன் மாறித் தன்மையும் உள்ள பண்புருவாகும்.

36. பண்புருவின் குறுக்கம் (Contraction of a tensor).

தேற்றம் : ஒரு கலப்புப் பண்புருவில் ஒரு மேற்குறியையும் ஒரு கீழ்க்குறியையும் சமமாக அமைத்தால் அதனல் உருவாக்கப்படும் கூட்டுத்தொகை, மூலப்பண்புருவை விட இரண்டு தகுநிலைகள் குறைந்த ஒரு பண்புருவாகும்.

நிருபணம் : A^{ij}_{k} என்பது x^i அமைப்பைச் சார்ந்த ஒரு மூன்றும் அடைவுக் கலப்புப் பண்புருவாக இருக்கட்டும். $\bar{x}^i$ அமைப்பில் அதன் கூறுகள் $\bar{A}^{pq}_{r}$ என இருக்கட்டும்.

எனவே $$\bar{A}^{pq}_{r} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} A^{ij}_{k} \qquad \ldots\ldots(36.1)$$

36.1ல் $r = p$ என பிரதியிட,

$$\bar{A}^{pq}_{p} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} A^{ij}_{k}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}\right) A^{ij}_{k}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \delta^k_i A^{ij}_{k}$$

எனவே, $$\bar{A}^{pq}_{p} = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} A^{ij}_{i} \qquad \ldots\ldots(36.2)$$

36.2ல் இருந்து A^{ij}_{i} என்பது முதலாம் அடைவு முரண்மாறிப் பண்புரு என்பது தெளிவு.

எனவே A^{ij}_{k} என்ற கலப்புப் பண்புருவில் $K = i$ என அமைப்பதால் கிடைக்கும் A^{ij}_{i} என்ற கூட்டுத்தொகை (கூட்டல் மரபுப்படி) மூலப்பண்புருவை விட இரு தகு நிலைகள் குறைந்த பண்புருவாகும்.

இந் நிருபணம் பொதுத் தன்மையுடையதால் இது போன்ற நிருபணத்தை எந்தவொரு கலப்புப் பண்புருவிற்கும் எழுத இயலும்.

குறிப்பு 1 : இவ்வாறு ஒரு கலப்புப் பண்புருவில் ஒரு முரண்மாறி சுட்டிணைப்பையும் ஓர் உடன்மாறிச் சுட்டிணைப்பையும் சமமாக அமைத்துப் புதுப் பண்புருவை உருவாக்கும் செயலைக் குறுக்கம் (contraction) என்கிறோம். மூலப்பண்புருவின் அடைவு n ஆனால் அதன் குறுக்கத்தின் அடைவு n-2 ஆகும்.

குறிப்பு 2: A^{ij}_{klm} என்ற ஐந்தாம் தகுநிலைக் கலப்புப் பண்புருவை எடுத்துக்கொண்டால் அதிலிருந்து குறுக்கத்தினுல் கீழ்க்கண்ட பல்வேறு பண்புருக்களை அமைக்கலாம்.

$$A^{ij}_{kli},\ A^{ij}_{kim},\ A^{ij}_{ilm},\ A^{ij}_{klj},\ A^{ij}_{kjm},\ A^{ij}_{jlm}$$

ஒவ்வொரு குறுக்கப்பட்ட பண்புருவும் மூன்றும் தகுநிலை உடையது. இவற்றை மேலும் ஒருமுறை குறுக்கி முதல் தகுநிலைப் பண்புருக்களை அமைக்கலாம். A^{ij}_{kji}, A^{ij}_{kij}, A^{ij}_{jim}, A^{ij}_{ijm} என்பன அவற்றில் சில.

குறிப்பு 3: மூலப்பண்புரு சமச்சீர் அல்லது எதிர்ச்சீர் தன்மைகள் உடையதாக இருந்தால் குறுக்கத்தினுல் அமைக்கப்படும் வேறுபட்ட பண்புருக்களின் எண்ணிக்கை குறையும்.

குறிப்பு 4: குறுக்கத்தை ஒரே மட்டத்திலுள்ள இரு சுட்டிணைப்புகளின் மேல் செயல்படுத்துவதில்லை. ஏனெனில் அவ்வாறு அமைக்கப்படும் புது உருப்படிகளுக்கு பண்புருத்தன்மை இருப்பதில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக A^{ij}_{klm}-ல் இருந்து A^{ij}_{kll} என்று எழுதுவதை குறுக்கம் எனக் கொள்வதில்லை. ஏனெனில் A^{ij}_{kll} என்பது ஒரு பண்புரு அல்ல. அது மாற்றுரு விதிக்கு கட்டுப்படுவதில்லை

குறிப்பு 5: இப்பொழுது x^i அமைப்பைச் சார்ந்த A^i_j என்ற பண்புருவை எடுத்துக் கொள்ளவும். $\bar{x}^i$ அமைப்பில் $\bar{A}^p_q$ என்பன அதன் கூறுகள் ஆக இருக்கட்டும்.

$$\text{ஆக } \bar{A}^p_q = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} A^i_j \qquad \text{......(36.3)}$$

$q = p$ என அமைக்க

$$\bar{A}^p_p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p} A^i_j$$

$$= \delta^j_i \ A^i_j$$

$$\bar{A}^p_p = A^i_i \qquad \text{......(36.4)}$$

A^i_i என்பது A^i_j -ன் குறுக்கம், எனவே அதன் அடைவு= 2—2=0.

ஆனல் 364 ன் படி A^i_i என்பது ஒரு மாற்றமிலி எனவே மாற்றமிலி என்பது ஒரு பூச்சியத் தகுநிலைப் பண்புருவாகும். இந்த முடிவு, நூற்பிரிவு 28-ல் கொடுக்கப்பட்ட பூச்சியத்தகுநிலைப் பண்புருவின் வரையறையுடன் பொருந்துவதைக் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு 6: மாற்றமிலி என்பது ஒரு பூச்சியத் தகுநிலைப் பண்புரு ஆதலால், ஒரு மாற்றமிலியையும் n-அடைவு உள்ள ஒரு பண்புருவையும் பெருக்குவதால் உருவாகும் பெருக்கற்பலன் ஒரு n-தகுநிலைப் பண்புருவாகும்.

(எ-கா). K என்பது ஒரு மாற்றமிலி A^{pq}_r என்பது ஒரு மூன்றும் தகுநிலைப் பண்புரு; எனவே $K A^{pq}_r$, ஒரு மூன்றும் தகு நிலைப் பண்புருவாகும்.

37. இரு பண்புருக்களின் அகப்பெருக்கல் (Inner multiplication of two tensors)

புறப்பெருக்கலையும், குறுக்கத்தையும் ஒன்றுசேர்த்துச் செயல் படுத்துவதன் மூலம் சில புதிய பண்புருக்களை உருவாக்கலாம்.

எடுத்துக் காட்டாக, A^{ij}_k, B^l_{mn} என்பனவற்றின் புறப் பெருக்கற்பலன் $A^{ij}_k B^l_{mn}$ ஆகும். இந்தப் பண்புருவை $i=n$ என அமைத்துக் குறுக்கினுல் $A^{ij}_k B^l_{mi}$ என்ற பண்புரு கிடைக்கிறது. இதனை A^{ij}_k, B^l_{mn} என்பனற்றின் அகப்பெருக்கற்பலன் (inner product) என்கிறோம். இவ்வாறு புறப்பெருக்கலையும், குறுக்கத்தையும் சேர்த்துச் செயல்படுத்துவதை அகப்பெருக்கல் (inner multiplication) என்கிறோம்.

முடிவு 1: அகப்பெருக்கல் மாற்று விதிக்கும் சேர்ப்பு விதிக்கும் கட்டுப்பட்டது.

நிருபணம் : இதை எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

முடிவு 2 : A^i, B_j இவற்றின் அகப் பெருக்கற்பலன் ஒரு மாற்ற மிலி ஆகும்.

நிருபணம் : A^i, B_j என்பன $\bar{x}^i$ அமைப்பைச் சார்ந்த பண்புருக் களாக இருக்கட்டும். x^i அமைப்பில் அவை முறையே $\bar{A}^p$, $\bar{B}_q$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\text{எனவே } \bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} A^i$$

$$\bar{B}_q = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} B_j$$

$$\text{ஆக, } \bar{A}^p \bar{B}_q = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} A^i \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} B_j$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} A^i B_j$$

$q=p$ என அமைத்துக் குறுக்கம் செய்ய

$$\bar{A}^p \bar{B}_p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} A^i B_j$$

$$= \delta^j_i A^i B_j$$

$$\bar{A}^p \bar{B}_p = A^i B_i$$

எனவே A^i, B_j இவற்றின் அகப்பெருக்கற்பலனாகிய A^iB_j ஒரு மாற்றமிலி அல்லது அளவி ஆகும். இந்த அகப்பெருக்கற்பலன் A^iB_i-ஐ A^i, B_j இவற்றின் **அளவிப்பெருக்கற்பலன்** (Scalar Product) என்று சொல்லுகிறோம்.

38. ஈவு விதி (Quotient law)

இதுகாறும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட உருப்படி பண்புருவா எனக் கண்டறிய, இலக்கெண் நிலைமாற்றத்திற்குப் பிறகு அது பண்புரு மாற்றுருவிதிக்குக் கட்டுப்படுகிறதா என பரிசோதித்து வந்தோம். இதுவே பண்புருவின் வரையறையிலிருந்து நமக்குக் கிடைத்த நேரடிச் சோதனை. இந்த முறையைப் பயன்படுத்துவது எப்பொழுதும் எளிதானதல்ல. எனவே அதைவிட எளிதான ஒரு சோதனையை **ஈவு விதி** (Quotient law)-யின் மூலம் தருகிறோம்.

ஈவு விதி: X என்ற உருப்படி, யாதாமொரு (arbitrary) பண்புருவோடு உருவாக்குகின்ற அகப்பெருக்கற்பலன் ஒரு பண்புருவானால், X என்பதும் ஒரு பண்புருவாகும்."

நிருபணம்: ஈவு விதி ஒரு குறிப்பிட்ட உருப்படிக்கே நிரூபிக்கப் படுகிறது. எனினும் நிரூபணத்தின் பொதுத் தன்மை கருதி எல்லா உருப்படிகளுக்கும் பொருந்தும் என எளிதில் உணரலாம்.

x^i அமைப்பில், $A\ (i, j, k)$ என்பது ஓர் உருப்படியாகவும் B_p^{ij} என்பது பண்புருவாகவும் இருக்கட்டும். இவற்றின் அகப்பெருக்கற்பலன் C_{pk} ஆக இருக்கட்டும்.

அதாவது

$$A\ (i, j, k)\ B_p^{ij} = C_{pk} \qquad \ldots\ldots(38.1)$$

ஈவு விதிப்படி $A\ (i,\ j,\ k)$ என்பது ஒருபண்புரு என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$\bar{x}^i$ அமைப்பில்,

$$\bar{A}\ (l, m, n)\ \bar{B}_q^{lm} = \bar{C}_{qn} \qquad \ldots\ldots(38.2)$$ என்க.

இனி, B_p^{ij}-ம், C_{pk}-ம் பண்புருக்களாக இருப்பதால்

$$\bar{B}_q^{lm} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\ \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\ B_p^{ij} \qquad \ldots\ldots(38.3)$$

$$\bar{C}_{qn} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\ C_{pk} \qquad \ldots\ldots(38.4)$$

38·3, 38.4 இவற்றை 38.2-ல் பயன்படுத்த,

$$\bar{A}\ (l,m,n)\ \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\ B_p^{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\ C_{pk} \qquad \ldots\ldots(38.5)$$

38.1-ஐ பயன்படுத்த,

$$\bar{A}\ (l, m, n)\ \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\ \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q}\ B_p^{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\ A\ (i, j, k)\ \ B_p^{ij}$$

(அ-து)

$$\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} \left[\bar{A}\ (l, m, n)\ \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\ \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}\ A\ (i, j, k) \right] B_p^{ij} = 0 \qquad \ldots\ldots(38.6)$$

38.6 ஐ $\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^r}$ ஆல் பெருக்கி, q விற்கு 1 லிருந்து N வரை மதிப்புகளைக் கொடுத்துக் கூட்ட (இனி இதை அகப்பெருக்கல் எனவே குறிப்போம்)

$$\delta^p_r \left[\bar{A}\ (l, m, n) \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} A\ (i, j, k) \right] B^{ij}_p = 0$$

$$(\text{அ-து}) \left[\bar{A}\ (l, m, n) \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} A\ (i, j, k) \right] B^{ij}_r = 0 \qquad \ldots\ldots(38.7)$$

ஆனல், B^{ij}_r என்பது யாதாமொரு பண்புரு. எனவே அதன் ஒவ்வொரு கூற்றையும் பூச்சியமில்லாததாக எடுத்துக்கொள்ள முடியும். எனவே B^{ij}_r என்பது பூச்சியம் ஆகாது. எனவே அடைப்புக் குறிகளுக்குள் உள்ளவை பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$\text{ஆக}\ \ \bar{A}\ (l, m, n) \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} A\ (i, j, k) \qquad \ldots\ldots(38.8)$$

$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^t}$ யினுல் அகப் பெருக்கல் செய்யும்பொழுது

$$\bar{A}\ (l, m, n)\ \delta^l_s\ \ \delta^m_t = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^t} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\ \ A\ (i, j, k)$$

$$(\text{அ-து})\ \ \bar{A}\ (s, t, n) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^t} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} A\ (i, j, k)$$

எனவே $A\ (i, j, k)$ என்பது பண்புரு மாற்றுரு விதிக்குக் கட்டுப்படுகிறது. அது i, j, k இவற்றில் உடன்மாறித்தன்மை உடையது. எனவே அது ஒரு மூன்றும் தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புரு. அதை A_{ijk} எனக் குறிக்கலாம்.

குறிப்பு 1 : ஈவு விதியைப் பயன்படுத்தும் போது மிக விழிப்புடன் இருத்தல் வேண்டும். மேற்கொடுக்கப்பட்ட நிருபணத்தில் B^{ij}_p என்பது யாதாமொரு பண்புருவாக இருத்தல் மிக முக்கியமானது. அதற்கு சமச்சீர் அல்லது எதிர்ச்சீர் தன்மைகள் இருத்தல் ஆகாது.

B_p^{ij} என்பது i, j இவற்றில் சமச்சீர் உடையதாக இருப்பின் நிரூபணத்தின் போக்கு எவ்வாறு மாறும் என்பதை ஈண்டு நோக்குவோம். அவ்வாறு இருப்பின் 38.7 ஐ 38.8 தொடராது. B_p^{ij} என்ற பண்புரு i, j களில் சமச்சீர் உடையதால் B_p^{ij} ன் குணகம் B_p^{ji} ன் குணகத்தோடு கலந்துள்ளது. உண்மையில் $B_p^{ij} = B_p^{ji}$ ஆக இருப்பதால் B_p^{ij} ன் குணகம்

$$A\,(i, j, k)\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + A\,(j, i, k)\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே 38.7 ல் இருந்து

$$\bar{A}\,(l, m, n)\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial \bar{x}^j} + \bar{A}\,(l, m, n)\,\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}$$

$$= A\,(i, j, \dot{k})\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + A\,(i, j, k)\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$$

என்பது தொடர்கிறது.

போலிச் சுட்டிணைப்புகளை மாற்ற

$$\bar{A}\,(l, m, n)\,\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} + \bar{A}\,(m, l, n)\,\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j}$$

$$= A\,(i, j, k)\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + A\,(j, i, k)\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}.$$

(அ-து)

$$[\bar{A}\,(l, m, n) + \bar{A}\,(m, l, n)]\,\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j}$$

$$= [A\,(i, j, k) + A(j, i, k)]\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}.$$

$\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s}\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^t}$ ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$A\,(i, j, k) + A\,(j, i, k)$ என்பது ஒரு மூன்றும் தகுநிலை உடன் மாறிப் பண்புரு எனக் கிடைக்கிறது. மேலும் நமக்கு $A\,(i, j, k)$ என்பது i, j ல் சமச்சீர் உடையது எனக் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் தான் $A\,(i, j, k)$ ஒரு சமச்சீர் பண்புரு என முடிவு செய்யலாம். எனவே ஈவு விதியைக் கவனத்தோடு பயன்படுத்த வேண்டும்.

குறிப்பு 2: ஈவு விதியினை பெருக்கல் விதியோடு சேர்த்து நோக்கும்போது கீழ்க்காணும் முடிவைப் பெறுகிறோம்.

"AB என்பது $(m+p)$-வது தகுநிலை முரண்மாறித் தன்மையும், $(n+q)$-வது தகுநிலை உடன்மாறித் தன்மையும் உள்ள பண்புருவாகவும், B என்பது p-வது தகுநிலை முரண்மாறித் தன்மையும், q-வது தகுநிலை உடன்மாறித் தன்மையும் உடைய பண்புருவாகவும் இருந்தால், A என்பது m-வது அடைவு முரண்மாறித் தன்மையும் n-வது அடைவு உடன்மாறித் தன்மையும் உள்ள பண்புருவாகும்."

39. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. A^r, B^r என்பன யாதாமொரு முரண்மாறி வெக்டர்களாவும், $C_{rs}\,A^r\,B^s$ என்பது ஒரு மாற்றமிலியாகவும் இருந்தால், C_{rs} என்பது ஒரு இரண்டாம் அடைவு உடன்மாறிப் பண்புரு என நிரூபி.

$C_{rs}\,A^r\,B^s=\phi$ ஓர் அளவி அல்லது ஒரு பூச்சிய அடைவுப் பண்புரு எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$A^r\,B^s$ என்பன யாதாமொரு முரண்மாறி வெக்டர்கள். எனவே $A^r\,B^s$ என்பது யாதாமொரு இரண்டாம் அடைவு முரண் மாறிப் பண்புருவாகும்.

எனவே, ஈவு விதிப்படி C_{rs} என்பது ஒரு இரண்டாம் அடைவு உடன்மாறிப் பண்புருவாகும்.

2. A^r என்பது யாதாமொரு முரண்மாறி வெக்டராகவும், $B_{rs}\,A^r\,A^s$ என்பது ஒரு அளவியாகவும் இருப்பின் $B_{rs}+B_{sr}$ என்பது ஒரு இரண்டாம் அடைவு உடன்மாறிப் பண்புரு என நிரூபி.

$B_{rs}\,A^r\,A^s=\phi$ ஓர் அளவி; அதாவது ஒரு பூச்சிய அடைவுப் பண்புரு எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

A^r என்பது யாதாமொரு முரண்மாறி வெக்டர். எனவே $A^r\,A^s$ என்பது இரண்டாம் அடைவு முரண்மாறிப் பண்புருவாகும். ஆனால் இது r, s களில் சமச்சீர் உடையது. எனவே ஈவு விதிப்படி $B_{rs}+B_{sr}$ என்பது ஓர் இரண்டாம் அடைவு உடன்மாறிப் பண்புருவாகும்.

40. இரண்டாம் அடைவு இணையிய சமச்சீர் பண்புருக்கள் (Second order conjugate symmetric tensors)

A_{ij} என்ற ஒரு சமச்சீர் உடன்மாறிப் பண்புருவை எடுத்துக் கொள்க.

அதன் அணிக்கோவை $|A_{ij}| = A$ என்பது பூச்சியமில்லாது இருக்கட்டும்.

B^{ij} என்னும் உருப்படி கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டால் வரையறை செய்யப்பட்டது என்று கொள்ளவும்.

$$B^{ij} = \frac{(A_{ij}) \text{ ல் } A_{ij} \text{ ன் இணைச்சினை}}{A} \qquad \ldots\ldots(40.1)$$

B^{ij} என்பன ஓர் இரண்டாம் அடைவு முரண்மாறிப் பண்புருவின் கூறுகள் என நிரூபிப்போம். இதை எதிர்நோக்கியே அந்தப் பண்புருவில் முரண்மாறிச் சுட்டிணைப்புகளைப் பயன் படுத்தியுள்ளோம்.

அணிக்கோவைகளின் இயல்பு ஒன்றினல்

$$A_{ij}\ B^{ik} = \delta_j^k \qquad \ldots\ldots(40.2)$$

என எழுதலாம்.

δ_j^k என்பது ஓர் இரண்டாம் அடைவு கலப்புப் பண்புரு. இருப்பினும் ஈவு விதியை இங்கு பயன்படுத்தி B^{ik} ஒரு பண்புரு என்னும் முடிவிற்கு வர இயலாது. ஏனெனில் A_{ij} என்பது யாதாமொரு பண்புரு அல்ல. எனவே B^{ik} என்பது பண்புரு என நிரூபிக்க கீழ்க்கண்ட முறையைக் கடைப்பிடிக்கிறோம்.

C^j என்பது யாதாமொரு முரண்மாறி வெக்டர் எனில்,

$$D_i = A_{ij}\ C^j \qquad \ldots\ldots(40.3)$$

என்பது யாதாமொரு உடன்மாறி வெக்டர் ஆகும். ஏனெனில் $A \neq 0$ ஆதலால், இந்த N சமன்பாடுகளை தீர்வு கண்டு C^j களை தன்னேரில்லாதபடி D_i க்களில் எழுத முடியும்.

இப்பொழுது

$$\begin{aligned} D_i\ B^{ik} &= A_{ij}\ C^j\ B^{ik} \\ &= A_{ij}\ B^{ik}\ C^j \\ &= \delta_j^k\ C^j \\ &= C^k \end{aligned}$$

ஆக $D_i\ B^{ik} = C^k$

இங்கே D_i என்பது யாதாமொரு உடன்மாறி வெக்டர்; C^k என்பது ஒரு முரண்மாறி வெக்டர். எனவே ஈவு விதிப்படி B^{ik} என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை முரண்மாறிப் பண்புரு ஆகும். B^{ij}-ன் வரையறையிலிருந்தே அதுவும் A_{ij} போன்று ஒரு சமச்சீர் பண்புரு என்பது தெளிவு.

இனி, மேற்கூறிய முறையைப் பயன்படுத்தி B^{ik}-ல் இருந்து E_{ij} என்ற புதிய பண்புருவை உருவாக்குவோம்.

$$E_{ij} = \frac{|B^{ij}| \text{ ல் } B^{ij}\text{-ன் இணைச்சினை}}{|B^{ij}|} \text{ என்க.}$$

அணிக்கோவையின் இயல்பு ஒன்றினால்

$$|A_{ij}| \; |B^{ij}| = 1$$

எனவே $|B^{ij}| \neq 0$. அதாவது E_{ij} மேற்கூறியவாறு வரையறை செய்யலாம்.

மேலும் $$E_{ij} B^{ik} = \delta^k_j$$

இதை A_{kl} ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$A_{kl} E_{ij} B^{ik} = \delta^k_j A_{kl}$$

(அ-து) $$E_{ij} \delta^i_l = A_{jl}$$

(அ-து) $$E_{lj} = A_{jl}$$

$$= A_{lj} \; [\because A_{ij} \text{ சமச்சீர் உடையது}]$$

எனவே E_{ij} என்பதும் A_{ij} என்பதும் ஒன்றே. அதாவது இம் முறைப்படி ஆக்கப்பட்ட பண்புரு மூலப் பண்புருவேயாகும்.

எனவே $A_{ij} B^{ik} = \delta^k_j$ ஆனால் A_{ij}, B^{ij} இவற்றை **இணையிய** (conjugate) அல்லது **தலைகீழ்ப்** (reciprocal) **பண்புருக்கள்** என்கிறோம்.

குறிப்பு: ஓர் இரண்டாம் அடைவு சமச்சீர்ப் பண்புருவின் அணிக்கோவை பூச்சியமில்லாதிருந்தால் தான் அதற்கு இணையிய பண்புரு உண்டு.

41. பண்புருக் களங்கள் (Tensor Fields)

ஒரு பண்புருவானது ஒரு புள்ளியில் மையங் கொண்டுள்ளது என்பது அதன் வரையறையிலிருந்து தெளிவு.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பண்புரு x^i அமைப்பில் A_{ij} என்றும், $\bar{x}^j$ அமைப்பில் $\bar{A}_{lm}$ என்றும் இருக்கட்டும்.

எனவே $$\bar{A}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} A_{ij} \qquad \ldots\ldots(41.1)$$

இந்த மாற்றுரு விதியில் x^i, $\bar{x}^j$ என்பன இருவேறு அமைப்புகளில் ஒரே புள்ளியின் இலக்கெண்கள் ஆகும். எனவே 41.1 ஆல் வரையறை செய்யப்பட்ட A_{ij} என்ற பண்புரு அந்தப் புள்ளியில் மையங்கொண்டுள்ளது. அந்தப்புள்ளி இருக்கும் இடத்தில்தான் அது வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது. எனவே இந்த அதிகாரத்தில் விளக்கப்பட்ட இயற்கணிதச் செயல்கள் யாவும் ஒரு புள்ளியில் கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களுக்கே பொருந்தும். வெவ்வேறு புள்ளிகளில் கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களுக்கு ஏற்றனவாகாது. எடுத்துக்காட்டாக இருபண்புருக்களின் பெருக்கலை ஒரே புள்ளியின் கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களை பெருக்குவதன் மூலமே செய்ய வேண்டும்.

இனி ஒரு வெளியின் பகுதி ஒன்றில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரே அடைவு உடைய ஒரு பண்புரு கொடுக்கப்படட்டும். இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்ட பண்புருக்களின் முழுக் கூட்டத்தையும் **பண்புருக் களம்** (tensor field) என்கிறோம். எனவே ஒரு பகுதியில் ஒரு பண்புருக்களம் வரையறை செய்யப்பட்டால், அந்தப் பகுதியின் ஒவ்வொரு புள்ளியையும் ஒரே அடைவுடைய ஒரு பண்புருவோடு ஒரு விதி இணைக்கின்றது. அதாவது A_{ij} என்ற ஒரு பண்புருக் களம் வரையறை செய்யப்பட்டால் அதன் கூறுகளான A_{ij} x^i ன் சார்புகள் ஆகும். எனவே பண்புருக் களத்தில் பண்புருவின் கூறுகள் புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறுவனவாக அமையும்.

ஒரு பண்புருக்களம் புள்ளியைச் சார்ந்து உள்ளதால் அதனை ஒரு **பண்புரு புள்ளிச்சார்பு** (tensor-point-function) என்றும் அழைக்கிறோம். இனி, சுருக்கமாக ஒரு பகுதியில் வரையறை செய்யப்பட்ட பண்புருக்களத்தை அப்பகுதியில் வரையறை செய்யப்பட்ட பண்புரு என்றே குறிப்பிடுவோம். இதனால் எந்தவிதக் கருத்துக் குழப்பமும் நேராது.

களத்தின் வரையறை செய்யும் பண்புருவின் அடைவே அந்த பண்புருக்களத்தின் அடைவு ஆகும். எனவே பல்வேறு அடைவுகள் உள்ள பண்புருக் களங்கள் உள்ளன. களத்தின் அடைவு பூச்சியமானால் அது ஒரு அளவிக்களம். அதன் அடைவு ஒன்றானால் அது ஒரு வெக்டர் களம்.

42. சார்புடைப் பண்புருக்கள் (Relative Tensors)

நாம் இதுவரை கண்ட பண்புருக்களை **தனித்த பண்புருக்கள்** (absolute tensors) என்கிறோம். இவையேயன்றி சில **சார்புடைப் பண்புருக்களும்** (relative tensors) உள்ளன. அவை பற்றிக் காண்போம்.

வரையறை : x^i அமைப்பிலிருந்து $\bar{x}^j$ அமைப்பிற்கு இலக்கெண் நிலைமாற்றம் செய்யப்படுகிறது என்க.

$J = \left|\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right|$ என்பது இந்த மாற்றத்தின் யாக்கோப்பின் அணிக்கோவை.

$$\bar{A}^{q_1 \ldots q_n}_{s_1 \ldots s_n} = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right|^w \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \bar{x}^{p_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{q_m}}{\partial x^{p_m}} \frac{\partial x^{r_1}}{\partial \bar{x}^{s_1}} \cdots \frac{\partial x^{r_n}}{\partial \bar{x}^{s_n}} A^{p_1 \ldots p_m}_{r_1 \ldots r_n} \qquad \ldots\ldots(42.1)$$

என்ற மாற்றுரு விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு மாறும் பண்புரு $A^{p_1 \ldots p_m}_{r^1 \ldots r_n}$ ஐ, **w நிறையுள்ள சார்புடைப் பண்புரு** (relative tensor of weight w) என்கிறோம்.

$w=0$ ஆனல் அது நாம் இதுவரை கண்ட தனித்த பண்புருவாகும்.

$w=1$ ஆனல் அந்தச் சார்புடைப் பண்புருவை **பண்புரு அடர்த்தி** (tensor density) என்கிறோம்.

குறிப்பு 1 : ஒரே தன்மையும், நிறையும் உள்ள இரு சார்புடைப் பண்புருக்களை கூட்டலாம். கூட்டுத்தொகை அதே தன்மையும், நிறையும் கொண்ட சார்புடைப் பண்புருவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\bar{A}^{jk}_{l} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^w \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} A^{pq}_{r} \qquad \ldots\ldots(42.2)$$

$$\bar{B}^{jk}_{l} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^w \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} B^{pq}_{r} \qquad \ldots\ldots(42.3)$$

இரண்டையும் கூட்ட

$$\left(\bar{A}^{jk}_{l} + \bar{B}^{jk}_{l}\right) = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^w \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} \left(A^{pq}_{r} + B^{pq}_{r}\right)$$

இதுவே வேண்டும் முடிவு.

குறிப்பு 2: ஒரு சார்புடைப் பண்புருவின் குறுக்கம் மூலப் பண்புருவின் நிறையுள்ளது.

$$\bar{A}^{jk}_{l} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial \bar{x}^{p}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{l}} A^{pq}_{r}$$

$j = l$ என அமைத்து இதைக் குறுக்க

$$\bar{A}^{jk}_{j} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \cdot \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{j}} A^{pq}_{r}$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} \delta^{r}_{p} A^{pq}_{r}$$

$$\therefore \quad \bar{A}^{kj}_{j} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{q}} A^{pq}_{p}.$$

எனவே குறுக்கத்தின் நிறையும் மூலப் பண்புருவின் நிறையும் சமம்.

குறிப்பு 3: சார்புடைப் பண்புருக்களின் அக, புறப் பெருக்கற்பலன்களின் நிறை, காரணிப் பண்புருக்களின் நிறைகளின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$\bar{A}^{j}_{k} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w_1} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{p}} \frac{\partial x^{q}}{\partial \bar{x}^{k}} A^{p}_{q} \quad (w_1 \text{ நிறையுள்ள பண்புரு})$$

$$\bar{B}^{lm}_{n} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w_2} \frac{\partial \bar{x}^{l}}{\partial x^{r}} \frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{s}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \bar{x}^{n}} B^{rs}_{t} \quad (w_2 \text{ நிறையுள்ள பண்புரு})$$

இவற்றின் புறப் பெருக்கற்பலன்.

$$\bar{A}^{j}_{k} \bar{B}^{lm}_{n} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w_1 + w_2} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{p}} \cdot \frac{\partial x^{q}}{\partial \bar{x}^{k}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{l}}{\partial x^{r}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{s}} \cdot \frac{\partial x^{t}}{\partial \bar{x}^{n}} A^{p}_{q} B^{rs}_{t}$$

இது $w_1 + w_2$ நிறையுள்ள ஒரு சார்புடைப் பண்புரு. இவற்றின் அகப் பெருக்கற்பலன் $A^{p}_{q} B^{rs}_{t}$ என்பதன் குறுக்கம். எனவே அதன் நிறையும் $w_1 + w_2$ ஆகும்.

முடிவு 1: e^{ijk} என்ற வரிசை மாற்றுக்குறியீடு நிறை—1 உள்ள ஒரு சார்புடை உடன்மாறிப் பண்புருவாகும்.

நிருபணம் :

$$\bar{e}_{pqr}=J^{-1}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\cdot\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^r}e_{ijk} \qquad ......(42.4)$$

என்று நிருபிக்க வேண்டும்.

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}e_{ijk}=\phi_{pqr} \text{ என்க} \qquad ......(42.5)$$

எனவே $\phi_{123}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^1}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^2}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^3}e_{ijk}$

வலது பக்கத்தில் உள்ள கோவை அணிக்கோவை J-ன் விரிவு ஆகும்.

எனவே $\phi_{123}=J$

இது போன்றே ϕ_{pqr} ன் ஒவ்வொரு கூற்றின் மதிப்பும் J ஆகும். ஆனால் J ஒரு அணிக்கோவை ஆதலால் இரு நிரல்களையோ நிரைகளையோ மாற்றி அமைத்தால் அதன் குறி மாறும்; இரு நிரல்களோ, நிரைகளோ சமமாக இருந்தால் அது பூச்சியமாகும்.

எனவே

(i) இரு பின்னிணைப்புகள் சமமாக இருந்தால் $\phi_{pqr}=0$

(ii) p, q, r சமமில்லாதிருந்து 1, 2, 3 ன் வட்ட வரிசையிலிருந்தால் $\phi_{pqr}=J$.

(iii) p, q, r சமமில்லாதிருந்து 1, 2, 3 ன் வட்டவரிசையில் இல்லாதிருந்தால் $\phi_{pqr}=-J$,

எனவே $\phi_{pqr}=J\,\bar{e}_{pqr}$ என எழுதலாம்.

ஆக (42.5) ல் பிரதியிட

$$J\,\bar{e}_{pqr}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}e_{ijk}$$

(அ-து) $$\bar{e}_{pqr}=\frac{\partial x^i}{\partial x^p}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r}e_{ijk}\,J^{-1}$$

எனவே e_{ijk} ஒரு சார்புடை உடன்மாறிப் பண்புரு. அதன் நிறை—1.

குறிப்பு : e_{ijk} ஐப் போன்று e^{ijk} என்ற முரண்மாறி உருப்படி ஒன்றையும் நாம் வரையறை செய்யலாம். இதுவும் ஒரு வரிசைமாற்றக் குறியீடு.

அதாவது

$$e^{ijk}=\begin{cases}=0 & i, j, k \text{ ஏதேனும் இரண்டு சமமானால்}\\ =+1 & i\neq j\neq k \text{ வட்ட வரிசையில் இருந்தால்}\\ =-1 & i\neq j\neq k \text{ வட்ட வரிசையில் இல்லாதிருந்தால்}\end{cases}$$

முடிவு 2: e^{ijk} என்னும் வரிசை மாற்றுக்குறியீடு நிறை $+1$ உள்ள ஒரு சார்புடை முரண்மாறிப் பண்புருவாகும்.

நிரூபணம்: இதை மேலேகண்ட முடிவின் நிரூபணத்தின் முறையை யொட்டியே நிரூபிக்கலாம்.

மாதிரிக் கணக்கு

A^{ij} ஒரு சமச்சீர் சார்புடை முரண்மாறிப் பண்புரு. அதன் நிறை w எனில், $|A^{ij}|$ நிறை $(w-2)$ உள்ள சார்புடைப் பண்புரு என நிரூபி.

நிரூபணம்:

$$\bar{A}^{pq}=\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w}\cdot\frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{i}}\cdot\frac{\partial \bar{x}^{q}}{\partial x^{j}}A^{ij}$$

எனவே $$|\bar{A}^{pq}|=\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w}\left|\frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{i}}\right|\left|\frac{\partial \bar{x}^{q}}{\partial x^{j}}\right||A^{ij}|$$

$$=J^{w}\cdot\frac{1}{J}\cdot\frac{1}{J}|A^{ij}|$$

$$=J^{w-2}|A^{ij}|$$

எனவே $|A^{ij}|$ நிறை $(w-2)$ உள்ள சார்புடைப் பண்புருவாகும்.

குறிப்பு: இந்நூலின்கண் பண்புரு என்னும் சொல் தனித்த பண்புருவையே குறிக்கும். அது சார்புடைப் பண்புரு என்றால் அத்தன்மை வெளிப்படையாக சொல்லப்பட வேண்டும்

பயிற்சி

1. δ^{p}_{q} என்ற கலப்புப் பண்புருவின் குறுக்கத்தின் மதிப்பு என்ன ?

2. x^{i} அமைப்பில் $A(p, q, r)$ என்ற உருப்படி $A(p, q, r)$ $B^{s}_{pq}=C^{s}_{r}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது. B^{s}_{pq} என்பது யாதாமொரு பண்புருவாகவும் C^{s}_{r} என்பது பண்புருவாகவும் இருந்தால் $A(p, q, r)$ என்பது ஒரு பண்புரு என நிரூபி.

3. A^r என்பன முதல் அடைவு முரண்மாறி யாதாமொரு பண்புருவின் கூறுகள். $A^r B_r$ என்ற அகப்பெருக்கற்பலன் மாற்ற மிலி ஆனால் B_r என்பன ஓர் உடன்மாறி வெக்டரின் கூறுகள் என நிறுவுக.

4. A^{ij}, B_{ij} என்பன V_N ல் உள்ள இரண்டு இரண்டாம் அடைவுப் பண்புருக்கள் என்றால் $A^{ij} B_{ij}$ ஒரு மாற்றமிலி என நிரூபி.

மறுதலையாக, $A^{ij} B_{ij}$ ஒரு மாற்றமிலியாக இருந்து, A^{ij} என்பது யாதாமொரு பண்புருவாக இருந்தால் B_{ij} என்பது ஒரு பண்புரு என நிரூபி.

5. A^i, B^j, C_k என்பன சுட்டப்பட்ட தன்மைகள் உள்ள மூன்று வெக்டர்களானால், $A^i B^j C_k$ என்பது ஒரு பண்புரு என நிரூபி. அதன் அடைவையும் தன்மையையும் சுட்டிக்காட்டுக.

6. A^i_j, B_k என்பன பண்புருக்கள் ஆனால் $A^i_j B_k$, $A^i_j B_i$ என்பன பண்புருக்கள் என நிறுவுக. ஒவ்வொன்றின் தகுநிலையை யும், தன்மையையும் தீர்மானிக்கவும்.

7. A^{pq}_{rs} என்பது ஒரு பண்புருவானால்

(i) $A^{pq}_{rs} + A^{qp}_{sr}$ என்பது ஒரு சமச்சீர் பண்புரு

(ii) $A^{pq}_{rs} - A^{qp}_{sr}$ என்பது ஒரு எதிர்ச்சீர் பண்புரு என நிரூபிக்கவும்.

8. A^{ij}, B_{mn} என்பன எதிர்ச்சீர் பண்புருக்கள் ஆனால் $A^{ij}\,\mathrm{B}_{mn} = C^{ij}_{mn}$ என்பது ஒரு சமச்சீர்ப் பண்புரு என நிரூபி.

9. A^{ij}_{kl} என்பது ஒரு பண்புரு. அதை இரு முறை குறுக்கினால் ஒரு மாற்றமிலி கிடைக்கிறதென நிரூபி.

10. $A^i B_j C(m, n)$ என்பது ஓர் அளவி. A^i, B_j என்பன யாதா மொரு பண்புருக்கள். $C(m, n)$ ஒரு பண்புரு என நிரூபி.

11. x^p அமைப்பில் A_{ijkl} என்பது ஒரு பண்புரு. மேலும் $A_{ijkl}+A_{ijlk}=0$.

$\bar{x}^q$ அமைப்பில்

$\bar{A}_{ijkl}+\bar{A}_{ijlk}=0$ என நேரடியாக நிரூபி.

12. A_{ijk} என்பது முதல் இரு சுட்டிணைப்புகளில் எதிர்ச்சீர் உடைய ஒரு பண்புரு. கடைசி இரு சுட்டிணைப்புகளில் எதிர்ச்சீர் உடையதும்,

$-P_{ijk}+P_{jik}=A_{ijk}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்வது மாகிய P_{ijk} என்ற பண்புருவைக் கண்டுபிடி.

13. A_{ij} ஒரு சமச்சீர் உடன்மாறிச் சார்புடைப் பண்புரு. அதன் நிறை w ஆனல் $|A_{ij}|$ நிறை $(w+2)$ உள்ள சார்புடைப் பண்புரு என நிரூபி.

14. A^i_j என்பது ஒரு கலப்புச் சார்புடைப் பண்புரு. $\left|A^i_j\right|$ ம், A^i_i ம் ஒரே நிறையுள்ளன என நிரூபி.

6. அளவைப் பண்புரு
(The Metric-Tensor)

43. நமக்குப் பழக்கமான சாதாரண முப்பரிமாண வெளியை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரு செவ்வக தெக்காட்டின் அமைப்பில் (y^1, y^2, y^3) என்பன ஒரு புள்ளியின் இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும்.

$P(y^i)$, $Q(y^i+\delta y^i)$ என்பன நெருக்கமான இரு புள்ளிகளாக இருந்தால் PQ-வின் நீளம் ds பின்வரும் சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படும்.

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dy^1)^2+(dy^2)^2+(dy^3)^2\\ &= dy^1dy^1 + dy^2dy^2 + dy^3dy^3\\ &= dy^idy^i \text{ (கூட்டல் மரபுப்படி)}\end{aligned} \qquad \ldots\ldots(43.1)$$

P-யில் ஒரு வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். (x^1, x^2, x^3) என்பன $P(yi)$-ன் வளைகோட்டிய இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும்.

இனி $$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^m}\, dx^m \text{ (25.3-ன்படி)}$$

எனவே $$(ds^2) = \frac{\partial y^i}{\partial x^m}\, dx^m . \frac{\partial y^i}{\partial x^n}\, dx^n \text{ (கூட்டல் மரபுப்படி)}$$

$$= \frac{\partial y^i}{\partial x^m} . \frac{\partial y^i}{\partial x^n}\, dx^m\, dx^n$$

$$= g_{mn}\, dx^m dx^n, \text{ இங்கே } g_{mn}\ \frac{\partial y^i}{\partial x^m}\ \frac{\partial y^i}{\partial x^n}$$

எனவே $$(ds)^2 = g_{mn}\, dx^m dx^n \qquad \ldots\ldots(43.2)$$

இருபுள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் இலக்கெண் அமைப்பைப் பொருத்தது அன்று. ஆதலால் ds என்பது ஒரு மாற்றமிலியாகும். எனவே $g_{mn}\, dx^m\, dx^n$ என்பது ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

மேலும் $$g_{mn} = \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^n} \quad \ldots\ldots(43.3)$$

$$= \frac{\partial y^i}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^m}$$ (வகைக்கெழுப் பெருக்கலின் மாற்று விதி)

$$= g_{nm}$$

எனவே g_{mn} என்பது m, n களில் சமச்சீர் உடைய ஓர் உருப்படி.

P-ஐ நிலைப்புள்ளியாகக் கொண்டு Q-வின் இடத்தை மாற்றுவோமானால் dx^r என்பது யாதாமொரு முரண்மாறி வெக்டர் என்பது தெளிவு.

மேலும், $g_{mn}\, dx^m\, dx^n =$ ஒரு மாற்றமிலி

எனவே ஈவு விதியைப் பயன்படுத்தி g_{mn} என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலை உடன்மாறிச் சமச்சீர்ப் பண்புரு என முடிவு செய்யலாம் (39-2). இந்தப் பண்புருவை வெளியின் **அளவைப் பண்புரு** (the metric tensor) அல்லது **அடிப்படைப் பண்புரு** (the fundamental tensor) என்கிறோம்.

ds என்பதை **கோட்டு மூலம்** (the line element) என்கிறோம்.

$(ds)^2 = g_{mn}\, dx^m\, dx^n$ என்ற வகைக்கெழுக் கோவையை வெளியின் **அளவை யுரு** (metric form) அல்லது **அடிப்படையுரு** (fundamental form) என்று கூறுகிறோம்.

குறிப்பு 1: $|g_{mn}| = g$ என்க.

$$|g_{mn}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

$$= \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^i} \right|^2 \neq 0$$ எனவே $g = |g_{mn}| \neq 0$.

குறிப்பு 2: $g = |g_{mn}|$ அதாவது அடிப்படையுருவின் அணிக் கோவை நிறை 2 உடைய சார்புடைப் பண்புருவாகும்.

நிருபணம்:

$$\bar{g} = |\bar{g}_{pq}| = \left| \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^q} \, g_{mn} \right|$$

$$= \left| \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} \right| \left| \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^q} \right| \left| g_{mn} \right|$$

$$= J.J.\, g$$

$$= J^2 g$$

எனவே $\bar{g} = J^2 g$

எனவே g நிறை இரண்டு உள்ள ஒரு பூச்சிய நிலை சார்புடைப் பண்புரு ஆகும். அதாவது g, நிறை இரண்டு உடைய அளவி ஆகும்.

குறிப்பு 3: g_{mn} என்பது ஒரு சமச்சீர் உடன்மாறிப் பண்புரு மேலும் $g \neq 0$. எனவே அதற்கு ஓர் இணையிய பண்புரு உண்டு. அது g^{mn} எனக் கொண்டால்

$$g^{mn} = \frac{|g_{mn}| \text{ ல் } g_{mn} \text{ ன் இணைச்சினை}}{g} \qquad \ldots\ldots(43.4)$$

40.1 ன்படி g^{mn} என்பது ஓர் இரண்டாம் அடைவு முரண்மாறி சமச்சீர்ப் பண்புருவாகும்.

40.2 ன்படி $g_{mn}\, g^{pn} = \delta^m_p$ ......(43.5)

குறிப்பு 4: வெவ்வேறு இலக்கெண் அமைப்புகளில் g_{mn}-க்கு வெவ்வேறு கூறுகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 1: x^i என்பன செவ்வக தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் ஆயின்

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$
$$= dx^1.dx^1 + dx^2.dx^2 + dx^3.dx^3$$

எனவே $g_{11} = 1,\ g_{22} = 1,\ g_{33} = 1,$

$m \neq n$ ஆனல் $g_{mn} = 0.$

எனவே
$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 2: உருளை இலக்கெண்களில் அளவுப்பண்புருவைத் தீர்மானிப்போமாக.

(ρ, ϕ, z) என்பன (x^1, x^2, x^3) என்னும் தெக்காட்டின் இலக்கெண்களுக்குச் சரியான உருளை இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும்

$$x^1 = \rho \cos \phi, \ x^2 = \rho \sin \phi, \ x^3 = z.$$

எனவே

$$dx^1 = -\rho \sin \phi \, d\phi + \cos \phi \, d\rho$$
$$dx^2 = \rho \cos \phi \, d\phi + \sin \phi \, d\rho$$
$$dx^3 = dz$$

$\therefore (ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2) + (dx^3)$-ல் பிரதியிட

$$(ds)^2 = (-\rho \sin \phi \, d\phi + \cos \phi \, d\rho)^2 + (\rho \cos \phi \, d\phi + \sin d\rho)^2 + (dz)^2$$
$$= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2$$

ஆக $\quad g_{11} = 1, \ g_{22} = \rho^2, \ g_{33} = 1$

$m \neq n$ ஆனால் $g_{mn} = 0$

எனவே
$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 3: கோளத்துருவ இலக்கெண்களில் அளவைப் பண்புருவை எழுத :—

(x^1, x^2, x^3) என்ற தெக்காட்டின் இலக்கெண்களுக்குச் சரியான கோளதுருவ எண்கள் (r, θ, ϕ) ஆனால்

$$x^1 = \gamma \sin \theta \cos \phi, \ x^2 = \gamma \sin \theta \sin \phi, \ x^3 = \gamma \cos \theta$$

எனவே

$$dx^1 = -\gamma \sin \theta \sin \phi \, d\phi + \gamma \cos \theta \cos \phi \, d\theta + \sin \theta \cos \phi \, d\gamma$$
$$dx^2 = \gamma \sin \theta \cos \phi \, d\phi + \gamma \cos \theta \sin \phi \, d\theta + \sin \theta \sin \phi \, d\gamma$$
$$dx^3 = -\gamma \sin \theta \, d\theta + \cos \theta \, d\gamma$$

இனி $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ ல் பிரதியிட்டுச் சுருக்க

$$(ds)^2 = (d\gamma)^2 + \gamma^2 (d\theta)^2 + \gamma^2 \sin^2 \theta \, (d\phi)^2$$

எனவே

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

குறிப்பு 5: அடுத்து (i) உருளை (ii) கோளத்துருவ இல. கெண்களில் இணையிய அளவைப் பண்புருவைத் தீர்மானிப்போம்.

(i) உருளை இலக்கெண்களில்,

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

எனவே $g = | g_{mn} | = \rho^2$

$$\therefore g^{11} = \frac{g_{11} \text{ ன் இணைச்சினை}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{22} = \frac{g_{22} \text{ ன் இணைச்சினை}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33} = \frac{g_{33} \text{ ன் இணைச்சினை}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \rho^2 \end{vmatrix} = 1$$

$m \neq n$ ஆக இருந்தால் $g^{mn} = 0$

$$\therefore g^{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) கோளத்துருவ இலக்கெண்களில்,

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore g = | g_{mn} | = \gamma^4 \sin^2\theta$$

முன்போலவே $g^{11} = 1$, $g^{22} = \frac{1}{\gamma^2}$, $g^{33} = \frac{1}{\gamma^2 \sin^2\theta}$

$m \neq n$ ஆயின் $g^{mn} = o$

எனவே
$$g^{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma^2 \sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

குறிப்பு 6 : செவ்வக நெக்காட்டின் அமைப்புகளில் g_{mn}ம் g^{mn}ம் சமம்.

44. N-பரிமாண வெளியில் அளவைப் பண்புரு.

ஒரு N-பரிமாண வெளி V_N-ல் $P\ (x^i)\ Q\ (x^i+\delta x^i)$ என்ற இரு நெருங்கிய புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். V_N 'அளவை' யைப் பெற்ற வெளியாக இருந்தால் மட்டுமே PQ-ன் நீளம் அல்லது P, Q இவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் பற்றி நாம் பேச இயலும். எல்லா வெளிகளுமே 'அளவை' பெற்றவையாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதை முன்னர் கண்டோம். எனவே V_N-ஐ ஓர் 'அளவை' பெற்ற வெளியாக எடுத்துக்கொண்டு அதன் பின்னரே PQ-ன் நீளத்தை நாம் வரையறை செய்கிறோம். வெளியின் பரிமாணம் மூன்றிற்கு மேற்படும் பொழுது PQ ன் நீளம் என்னும் கருத்தை கற்பனை மூலமே காண முடியும். எனவே V_N ல் PQ ன் நீளத்தை வரையறை மூலமே தருகிறோம். இது Bம் சாதாரண வெளியில் உள்ள தூர சூத்திரத்தின் நீட்சியேயாகும்.

எனவே P, Q இவற்றிடையே உள்ள கழிநுண் (infinitesimal) தூரம் ds-ஐ

$$(ds)^2 = g_{mn}\, dx^m dx^n \qquad \ldots\ldots(44.1)$$

என்ற சமன்பாட்டால் வரையறை செய்கிறோம். இதில் ds என்பது ஒரு மாற்றமிலி, g_{mn} என்ற அடிப்படைப் பண்புருவின் கூறுகள் x^i ன் சார்புகள்.

44.1 ல் உள்ள இருபடி வகையீட்டுக் கோவையை ரீமானின் அளவை (Riemannian metric) என்கிறோம். அந்த அளவையால் அளக்கப் படும் V_N வெளியை ரீமானின் வெளி (Riemannian space) என்றும் அதை அடிப்படையாகக் கொண்ட உருவகணிதத்தை ரீமானின் உருவகணிதம் என்றும் சொல்கிறோம்.

ரீமானின் உருவகணிதம் இரு நெருங்கிய புள்ளிகளுக் கிடையே உள்ள கழிநுண் தூரத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டது என்பது கூர்ந்து நோக்குதற்குரியது. இங்கு தூரத்தை ஏதோ இரு புள்ளிகள் P, Q க்களுக்கு இடையில் உள்ள தூரமாக வரையறை செய்யவில்லை. நெருங்கியுள்ள புள்ளி களுக்கு இடையே உள்ள தூரத்திற்கே 'வரையறை' கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது.

44.1 ல் கொடுக்கப்பட்ட g_{mn} என்பது ரீமான் வெளியின் அடிப்படை உடன்மாறிச் சமச்சீர் பண்புரு ஆகும். அதன் இணையிய பண்புரு g^{mn} அடிப்படை முரண்மாறி சமச்சீர் பண்புரு ஆகும்.

குறிப்பு 1: $g_{mn}\, dx^m\, dx^n$ என்பது ஒரு வெளியின் அடிப்படை அளவையாக இருக்கட்டும். அந்த வெளியைச் சார்ந்த ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட இலக்கெண் அமைப்பு y^i-ல் $g_{mn}\, dx^m\, dx^n$ என்பது வகையீடுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையாக அமையக் கூடுமானல் அந்த வெளியை யூக்லிடின் (euclidean) வெளி என அழைக்கிறோம். அதாவது, $(ds)^2 = g_{mn}\, dx^m\, dx^n = dy^i\, dy^i$ ஆனல் அந்த வெளி யூக்லிடின் வெளியாகும். y^i என்பனவற்றை யூக்லிடின் இலக்கெண்கள் என்றும், அந்த வெளியின் உருவ கணிதத்தை யூக்லிடின் உருவகணிதம் என்றும் சொல்கிறோம்.

y^i—அமைப்பில்,

$$g_{mn} = \delta^m_n \;, \; g^{mn} = \delta^m_n$$

குறிப்பு 2: யூக்லிடின் இலக்கெண்கள் என்பன செங்கோண தெக்காட்டின் இலக்கெண்களின் ஒரு குறிப்பிட்ட வழக்கே யாகும். அடிப்படை அளவையின் குணகங்கள் அதாவது அடிப்படைப் பண்புருவின் கூறுகள், ஏதாவது ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில் மாறிலிகளாக இருந்தால் அந்த அமைப்பை தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பு என்று சொல்கிறோம். அத்துடன் $m \neq n$ ஆக இருக்கும் பொழுது $g_{mn} = 0$ ஆக இருந்தால் அதை செங்கோண அமைப்பு என்கிறோம்.

45. அளவை உருவின் தன்மை

$$(ds)^2 = g_{mn}\, dx^m\, dx^n \qquad \ldots\ldots(45.1)$$

என்னும் சமன்பாடு ஒரு வெளியில் அளவை உருவை வரையறை செய்கின்றது. சாதாரண வெளியில் இந்த உரு மிகை-உறுதி உரு (positive definite form). அதாவது எல்லா வகையீடுகளும் பூச்சியங்கள் ஆனல் அன்றி அது மிகைத்தன்மை உடையதாகவே இருக்கும். அதாவது இரு நெருக்கமான புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் புள்ளிகள் ஒன்றின்மேல் ஒன்ருக அமைந்தால்தான் மறையும்.

ஆனல் ரீமான் வெளியில் இந்த அளவை மிகை-உறுதி உருவுடையதாகத்தான் இருக்கவேண்டும் என்ற கட்டுப்பாட்டை நாம் விதிப்பதில்லை. உறுதியிலி (indefinite) உருவும் அதற்கு இருக்கக்கூடும் என்று கொள்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2$$

இது $dx^1 = dx^2$ ஆகும் பொழுது பூச்சியமாகின்றது.

ஐன்ஸ்டீனின் சிறப்புச்சார்புக் கொள்கையில் (special theory of relativity) நான்கு பரிமாண வெளியில்

$$(ds)^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2(dx^4)^2 \qquad \ldots\ldots(45.2)$$

என்ற அளவை உருவை எடுத்துக் கொள்கிறோம். இது மிகை-உறுதி உரு உடையது அல்ல. x^1, x^2, x^3 மூன்றும் மாறிலிகளாக் கொண்ட எல்லா வரைகளுக்கும் இது மிகைத்தன்மை உடையது. ஆனால், x^4 மாறிலியாக உள்ள வரைகளுக்கு குறைத்தன்மையுடையது. எனவே x^4 மாறிலியாகும் பொழுது இரு நெருங்கிய புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் மெய்யானது அல்ல.

எனவே ரீமான் வெளி ஒன்றில் அளவை உரு $(ds)^2 = g^{mn}\, dx^m$. dx^n என்பது எப்பொழுதும் மிகை-உறுதித் தன்மை உடையது அன்று. ஒரு சில இடப் பெயர்ச்சிகளுக்கு அது மிகைத்தன்மையுடையது. மற்றவற்றிற்கு பூச்சியமாகவோ அல்லது குறைத் தன்மை உடையதாகவோ இருக்கலாம்.

எல்லா dx^r களும் பூச்சியமாக இல்லாதபோது $(ds)^2 = 0$ ஆனல் அந்த இடப்பெயர்ச்சியை இல்லாநிலை (null) இடப் பெயர்ச்சி என்கிறோம். இல்லா நிலையில்லாத இடப்பெயர்ச்சி dx^r களுக்கு $(ds)^2 = e\, g^{mn}\, dx^m\, dx^n$ என்று எழுதுகிறோம். இதில் அறிமுகப் படுத்தப்பட்ட e என்பது ஒரு சுட்டி (indicator). $(ds)^2$ எப்பொழுதும் மிகைத்தன்மையுள்ளவாறு அதன் மதிப்பை $+1$ என்றே அல்லது -1 என்றே கொள்கிறோம்.

எனவே

$$(ds)^2 = e\, g_{mn}\, dx^m\, dx^n \qquad \ldots\ldots(45.3)$$

என்பது மாற்றப்பட்ட அளவை உரு. e என்ற சுட்டியால் பெருக்கப்படும் பொழுது ds என்பது எப்பொழுதும் மெய்யான தூரம் ஆகும். எனவே இந்த சுட்டியை பயன்படுத்தி dx^r என்ற இடப் பெயர்ச்சியால் ஏற்படும் தூரத்தின் நீளத்தை

$(ds) = [e\, g_{mn}\, dx^m\, dx^n]^{\frac{1}{2}}$ என்று வரையறை செய்கிறோம். இல்லாநிலை இடப் பெயர்ச்சியின் நீளம் ‘ பூச்சியம் ’ என்றும் வரையறை செய்கிறோம்.

46. துணைப் பண்புருக்கள் (Associated tensors)

வரையறை : ஒரு கொடுக்கப்பட்ட பண்புருவை, அளவைப் பண்புரு, அதன் இணையிய பண்புரு இவற்றால் அகப்பெருக்கல்கள் செய்வதன் மூலம் புதிய பண்புருக்களைத் தோற்றுவிக்கலாம். இவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட புதிய பண்புருக்களை கொடுக்கப்பட்ட பண்புருவின் **துணைப் பண்புருக்கள்** (associated tensors) என்கிறோம்.

இம்முறையில் புதிய பண்புருக்களை உருவாக்கும் செயலின் தன்மையை நோக்கி அந்த முறையை சுட்டிணைப்புகளை ஏற்றம் அல்லது இறக்கம் (raising or lowering) செய்வது எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

A_{ij} என்னும் உடன்மாறிப் பண்புருவை எடுத்துக்கொள்வோம். g^{mn} உடன் அதன் அகப்பெருக்கற் பலன்

$$g^{in} \; A_{ij} = B^{n}{}_{\cdot j} \qquad \ldots(46.1)$$

என்கிறது.

இச்செயலினை n என்ற சுட்டிணைப்பின் 'ஏற்றம்' என்று குறிப்பிடுகிறோம். நகர்ந்த சுட்டிணைப்பு முன்பு இருந்த இடத்தில் ஒரு புள்ளியினைக்குறிக்கிறோம்.

மீண்டும் g^{mn} ஆல் அகப்பெருக்கல் கண்டால்

$g^{jp} \, g^{in} \;\; A_{ij} = B^{n}{}_{\cdot}{}^{p}{}_{\cdot}$ என்ருகிறது. சுட்டிணைப்புகள் இருந்த இடங்களில் புள்ளிகள் வைக்கப்படத்தான் வேண்டும் என்னும் கட்டுபாடு எதுவுமில்லை. குழப்பம் நேராது என்ருல் புள்ளிகளை விட்டு விடலாம்.

இனி, 46.1 ஐ இருபுறங்களில் g_{ln} ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்வோம்.

$$g_{en} \, g^{in} \; A_{ij} = g_{ln} \; B^{n}{}_{\cdot \; j}$$

(அ-து) $$\delta^{i}_{l} \; A_{ij} = B_{lj}$$

(அ-து) $$A_{lj} = B_{lj}$$

இதிலிருந்து B_{lj}யும் A_{lj}யும் ஒரே பண்புரு என்பது தெளிவு. எனவே அளவைப் பண்புரு, அதன் இணையிய பண்புரு இவற்ருல் அகப்பெருக்கல் செய்யும்போது உருவாகும் புதிய பண்புருக்களுக்கு வேறு மாற்று எழுத்து பயன்படுத்த வேண்டியதில்லை. மூலப் பண்புருவின் எழுத்து A ஆனுல் எல்லாத்துணைப் பண்புருக்களையும் A ஆல் குறிப்பிடலாம். எனவே துணைப் பண்புருக்களை உருவாக்கும் போது சுட்டிணைப்புகளை மட்டும் ஏற்றம் அல்லது இறக்கம் செய்கிருேம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $g^{in} \; A_{ij} = A^{n}{}_{\cdot j}$
2. $g^{ln} \; A_{mnp} = A_{m \cdot}{}^{n}{}_{p}$
3. $g^{in} \, g^{mj} \; A_{ij} = A^{n}{}_{\cdot}{}^{m}{}_{\cdot}$

ஒரு பண்புருவிற்கு பல சுட்டிணைப்புகள் இருக்குமானுல் அதிலிருந்து தோன்றும் துணைப்பண்புருக்கள் பல உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு : $A^{ijk}_{\cdot\cdot\cdot lm}$ என்ற பண்புருவிலிருந்து கீழ்க் காணும் பண்புருக்களை எழுதலாம்.

(i) $A^{\cdot jk}_{r\cdot\cdot lm} = g_{ri} \; A^{ijk}_{\cdot\cdot\cdot lm}$

(ii) $A^{\cdot\cdot k}_{rn\; lm} = g_{ri} \; g_{nj} \; A^{ijk}_{\cdot\cdot\cdot lm}$

(iii) $A^{i\cdot kst}_{\cdot r} = g_{jr} \; g^{ls} \; g^{mt} \; A^{ijk}_{\cdot\cdot\cdot l_m}$

இதுபோன்று இன்னும் பலவற்றை எழுதலாம்.

குறிப்பு 1 : g^{mm}ஆல் பெருக்குவதை பின்வருமாறு எளிய முறையில் நினைவில் கொள்ளலாம்—"$m=n$ (அல்லது $n=m$) ஆக இருந்தால் தொடரும் உருப்படியில் இந்த சுட்டிணைப்பை ஏற்ற வும்" இதைப்போன்றே g_{mn} ஆல் பெருக்குவதையும் விளக்கலாம்.

குறிப்பு 2 : A^i, A_j என்பன துணை வெக்டர்களானல்

$$A_p = g_{pq} \; A^q ; \; A^q = g^{pq} \; A_p$$

குறிப்பு 3 : g^{mn}, g_{mn}, δ^m_n என்பன ஒன்றுக்கொன்று துணைப் பண்புருக்கள்.

இது $$g^{mn} \; g_{pn} = \delta^m_p$$

$$g_{mn} \; g^{pn} = \delta^p_m$$ என்பனவற்றிலிருந்து தெளிவு.

குறிப்பு 4 : g_{mn}, g^{mn} என்பன இணையிய பண்புருக்களாக இருப்பினும் A_{ij}, A^{ij} என்ற துணைப் பண்புருக்கள், பொதுவாக இணையிய பண்புருக்களாக இருப்பதில்லே.

முடிவு 1 : $A^p_{\cdot qr} = B^p_{\cdot q} \; C_r$ ஆனல்

(i) $A_{pqr} = B_{pq} \; C_r$

(ii) $A^{\cdot pr}_p = B^{\cdot q}_p \; C^r$ ஆகும்.

அதாவது மேற்கண்டதைப்போன்ற பண்புருச் சமன்பாடுகளில் கட்டற்ற சுட்டிணைப்பை இரு பக்கங்களிலும் ஏற்றவோ, இறக்கவோ செய்யலாம். அதனல் சமன்பாட்டின் சமத்தன்மை மாருது.

நிருபணம் :

$A^{p}_{\cdot qr} = B^{p}_{\cdot q} C_r$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

அதை g_{ip} ஆல் இரு பக்கங்களிலும் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$g_{ip} A^{p}_{\cdot qr} = g_{ip} B^{p}_{\cdot q} C_r$$

அதாவது $A_{iqr} = B_{iq} C_r$

எனவே $\underline{A_{pqr} = B_{pq} C_r}$

அடுத்து இரு பக்கங்களையும் $g^{iq} g^{jr}$ ஆல் பெருக்க

$$g^{iq} g^{jr} A_{pqr} = g^{iq} g^{jr} B_{pq} C_r$$

$$A_{p}^{\cdot ij} = B_{p}^{\cdot i} C^j$$

எனவே
$$A_{p}^{\cdot qr} = B_{p}^{\cdot q} C^r$$

முடிவு 2 : (i) $A^{p}_{\cdot q} B_{p}^{\cdot rs} = A_{pq} B^{prs}$

(ii) $A_{pq}^{\cdot\cdot r} B^{p}_{\cdot r} = A^{p \cdot r}_{\cdot q} B^{\cdot}_{pr} = A^{p}_{\cdot qr} B_{p}^{\cdot r}$

என நிருபி.

அதாவது மேற்கண்டவாறு உள்ள இரு பண்புருக்களின் அகப்பெருக்கற் பலன்களில் போலிச்சுட்டிணைப்பை அதன் இரு காரணிகளிலும் ஒரே சமயத்தில் ஒன்றில் ஏற்றவும், மற்றதில் இறக்கவும் செய்தால் பெருக்கற்பலன் மாருது.

நிரூபணம் :

(i) $A^{p}_{\cdot q} B^{\cdot rs}_{p} = g^{ip} A^{\cdot}_{iq} \; g_{pl} B^{lrs}$

$= g^{ip} g_{pl} A_{iq} B^{lrs}$

$= \delta^{i}_{l} A_{iq} B^{lrs}$

$= A_{lq} B^{lrs}$

$= A_{pq} B^{prs}$ [l என்ற போலிச் சுட்டிணைப்பை p ஆக மாற்ற

(ii) $A^{\cdot\cdot r}_{pq} B^{p}_{\cdot r} = g_{pi} g_{qj} A^{ijr} g^{pl} B_{lr}$

$= g_{pi} g^{pl} g_{qj} A^{ijr} B_{lr}$

$= \delta^{l}_{i} g_{qj} A^{ijr} B_{lr}$

$= g_{qj} A^{ljr} B_{lr}$

$= A^{l\cdot r}_{q} B_{lr}$ (போலி சுட்டிணைப்பு l-ஐ p ஆக்க)

$= A^{p\cdot r}_{q} \; B_{pr}$

எனவே $A^{\cdot\cdot r}_{pq} B^{p}_{\cdot r} = A^{p\cdot r}_{q} B_{pr}$

அடுத்து,

$A^{\cdot\cdot r}_{pq} B^{p}_{\cdot r} = g^{ri} A_{pqi} g_{jr} B^{pj}$

$= \delta^{i}_{j} A_{pqi} B^{pj}$

$= A_{pqj} B^{mj}$

$= A_{mqj} B^{mj}$

$= g_{pm} A^{p}_{\cdot qj} \; g^{pm} B^{\cdot j}_{p}$

$= A^{p}_{\cdot qj} \; B^{\cdot j}_{p}$

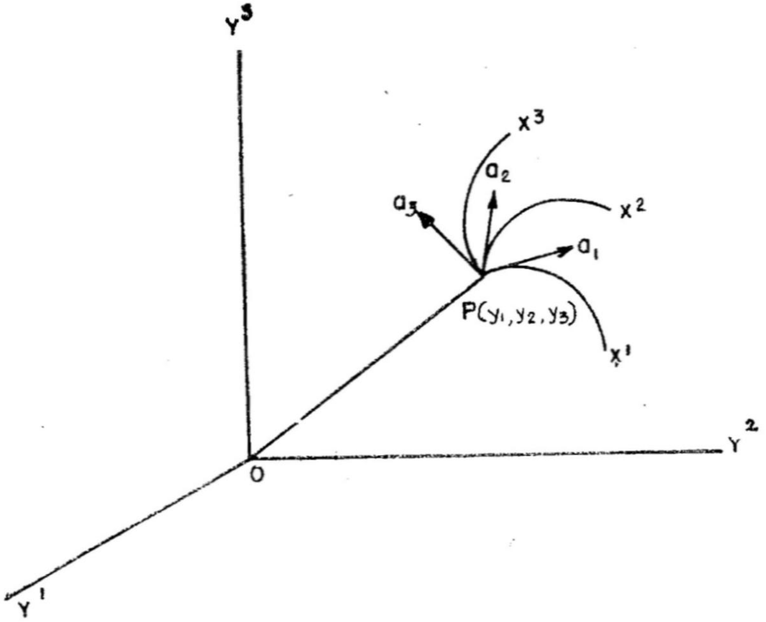
$= A^{p}_{\cdot qr} \; B^{\cdot r}_{p}$

எனவே $A^{\cdot\cdot r}_{pq} B^{p}_{\cdot r} = A^{p}_{\cdot qr} \; B^{\cdot r}_{p}$

47. உடன்மாறி, முரண்மாறி வெக்டர்களின் வடிவகணித் விளக்கம்

நம் சாதாரண முப்பரிமாண யூக்லிடின் வெளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இதுவரை நாம் படித்த சில முக்கியமான முடிவுகளை இரண்டாம் அதிகாரத்தில் கண்ட வெக்டர் விளக்கங்களைப் பயன் படுத்தி மேலும் விளக்கம் காண்போமாக.

$0\text{-}Y^1 Y^2 Y^3$ என்பது ஒரு தெக்காட்டின் அச்சு அமைப்பாக இருக்கட்டும். $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ என்பன இவ்வமைப்பால் தீர்மானிக்கப் பட்ட அடிப்படை செங்குத்தியல் வெக்டர் தொகுதியாக இருக்கட்டும்.



இனி $P(y^1, y^2, y^3)$ என்ற புள்ளியின் அமைநிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$-ஐ

$\mathbf{r} = \mathbf{e}_i\, y^i$ $(i = 1,2,3)$ என எழுதலாம். அடிப்படை வெக்டர்கள் $P(y^1, y^2, y^3,)$ ன் நிலையைச் சார்ந்தன அல்ல, ஆதலால்

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i\, dy^i \qquad \ldots\ldots(47.1)$$

அடுத்து

$$(ds)^2 = d\mathbf{r}.d\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{e}_i\, dy\, \mathbf{e}_j\, dy^j$$

$$= dy^i,\ dy^j \left(\because \mathbf{e}_{i.}\ \mathbf{e}_j = \delta^i_j \right)$$

$$(ds)^2 = dy^i\, dy^i \qquad \ldots\ldots(47.2)$$

இனி, $x^i = x^i\,(y^1, y^2, y^3)\ (i = 1, 2, 3)$

என்னும் சமன்பாடுகள் X என்ற ஒரு வளை கோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பை வரையறை செய்யட்டும்.

இப்பொழுது $\mathbf{r}$-ஐ x^1, x^2, x^3 களின் சார்பாகவும் கருதலாம்

(அ-து) $\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (x^1, x^2, x^3)$

எனவே $d\mathbf{r} = \dfrac{\partial\, \mathbf{r}}{\partial\, x^m}\, dx^m$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^m} = \mathbf{a}_m$ என பிரதியிட

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_m dx^m \qquad \ldots\ldots(47.3)$$

$\mathbf{a}_m = \dfrac{\partial\, \mathbf{r}}{\partial\, x^m}$ என்பது X^m இலக்கு வளைவுக்கு தொடு கோடாய் அமைந்த அடிப்படை வெக்டர் ஆகும்.

இனி, $(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{a}_m\ dx^m \cdot \mathbf{a}_n\, dx^n \qquad \ldots\ldots(47.4)$

47·1, 47·3 இவற்றிலிருந்து

$$\mathbf{a}_m dx^m = \mathbf{e}_i\ dy^i$$

$$= \mathbf{e}_i\ \frac{\partial\, y^i}{\partial\, x^m}\, dx^m$$

எனவே $\mathbf{a}_m = \mathbf{e}_i\ \dfrac{\partial\, y^i}{\partial\, x^m}$

47·4 ல் பிரதியிட

$$(ds)^2 = \mathbf{e_i} \frac{\partial y^i}{\partial x^m} dx^m . \mathbf{e_j} \frac{\partial y^j}{\partial x^n} dx^n$$

$$= \mathbf{e_i} . \mathbf{e_j} \frac{\partial y^i}{\partial x^m} \frac{\partial y^j}{\partial x^n} dx^m dx^n$$

$$(ds)^2 = \delta^i_j \frac{\partial y^i}{\partial x^m} . \frac{\partial y^j}{\partial x^n} dx^m dx^n$$

$$= \frac{\partial y^i}{\partial x^m} . \frac{\partial y^i}{\partial x^n} dx^m dx^n$$

$$= g_{mn} dx^m dx^n \qquad ......(47.5)$$

எனவே $$g_{mn} = \mathbf{a_m} \mathbf{a_n} \qquad ......(47.6)$$

X-இலக்கெண் அமைப்பில் அடிப்படை வெக்டர்களின் கூறுகள்

$\mathbf{a}_1$: $(a_1, 0, 0)$

$\mathbf{a}_2$: $(0, a_2, 0)$

$\mathbf{a}_3$: $(0, 0, a_3)$

அவை அலகு வெக்டர்களாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

A என்ற எந்த ஒரு வெக்டரையும் $\mathbf{A} = Kd\mathbf{r}$ என்ற உருவில் எழுதலாம். இங்கே K என்பது பொருத்தமான அளவி ஆகும்.

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i \text{ ஆதலால்}$$

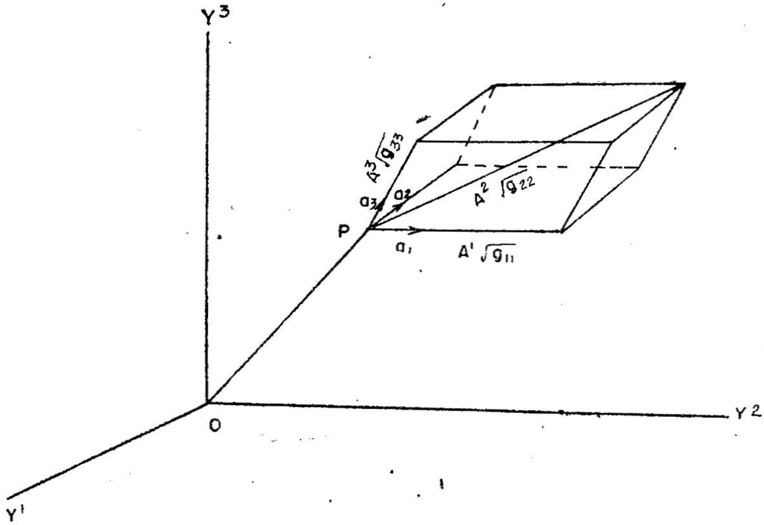
$$\mathbf{A} = K \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i$$

$$= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} (Kdx^i)$$

$$= \mathbf{a_i} A^i \text{ என்க (அதாவது } A^i = Kdx^i)$$

எனவே $$\mathbf{A} = \mathbf{a_i} A^i \qquad ......(47.7)$$

இனி 47.7-ல் காணும் A^i என்பன முரண்மாறி வெக்டரின் கூறுகள் என நிரூபிப்போம்.



$\bar{x}^i$ என்பது புதிய இலக்கெண் அமைப்பாக இருக்கட்டும். $P(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ என்பன $P(x^i)$-ன் புதிய இலக்கெண்களாக இருக்கட்டும்.

இனி $\quad d\mathbf{r} = \mathbf{a_i}\, dx^i = \overline{\mathbf{a_j}}\, d\bar{x}^j$

இங்கே $\overline{\mathbf{a_j}}$ புது இலக்கெண் அமைப்பில் அடிப்படை செங்குத்தியல்வு வெக்டர்கள்.

எனவே $$\mathbf{a_i}\, dx^i = \overline{\mathbf{a_j}}\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\, dx^i$$

dx^i என்பன யாதாமொரு இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிப்பதால்

$$\mathbf{a_i} = \overline{\mathbf{a_j}}\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \qquad \ldots\ldots(47.8)$$

அடுத்து $\quad \mathbf{A} = \mathbf{a_i}\, A^i = \overline{\mathbf{a_j}}\, \bar{A}^j$

இங்கே $\bar{A}^j$ என்பன புது அமைப்பில் அதன் கூறுகள் 47.8-ஐ பயன்படுத்த

$$\overline{\mathbf{a_j}}\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} A^i = \overline{\mathbf{a_j}}\, A^j$$

எனவே $$\bar{A}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\, \bar{A}^i$$

எனவே A^i என்பது முரண்மாறி வெக்டர். ஆக $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i A^i$ ஆக இருந்தால் A^i என்ற உருப்படிகளை **A** என்ற வெக்டரின் முரண் மாறிக் கூறுகள் என்று கூறுகிறோம். $A^1 \mathbf{a}_1$, $A^2 \mathbf{a}_2$, $A^3 \mathbf{a}_3$ என்பன **A** யை மூலைவிட்டமாக உள்ள இணைகரத்திண்மத்தின் (parallelopiped) விளிம்புகள் ஆகும்.

$\mathbf{a}_i$ என்பன அலகு வெக்டர்கள் அன்று. ஆதலால் விளிம்பு நீளங்களை பின்வருமாறு கணக்கிடுகிறோம்

$$| A^1 \mathbf{a}_1 | = \sqrt{A^1 \mathbf{a}_1 . A^1 \mathbf{a}_1} = A^1 \sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1}$$
$$= A^1 \sqrt{g_{11}} \qquad \text{[47.6 ன் படி]}$$

இவ்வாறே
$$| A^2 \mathbf{a}_2 | = A^2 \sqrt{g_{22}}$$
$$| A^3 \mathbf{a}_3 | = A^3 \sqrt{g_{33}} \qquad \ldots\ldots(47{\cdot}9)$$

எனவே இணைகரத் திண்மத்தின் விளிம்புகளின் நீளங்கள் முறையே $A^1 \sqrt{g_{11}}$, $A^2 \sqrt{g_{22}}$, $A^3 \sqrt{g_{33}}$ என்பன. இவை இத்திசைகளில் **A**-ன் உண்மையான கூறுகள், ஆதலின் இவற்றை **A**-ன் இயற்பியல் கூறுகள் என்று கூறுகிறோம்.

இனி,

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}, \ \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]}, \ \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3]} \qquad \ldots\ldots(47.10)$$

என்ற சமன்பாடுகளினால் வரையறை செய்யப்படும் $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$ என்ற மூன்று ஒரே தளத்தில் அமையாத வெக்டர்களை அறிமுகப் படுத்துகிறோம்.

வரையறைகளிலிருந்து

$$\mathbf{a}^i . \mathbf{a}_j = \delta^i_j \qquad \ldots\ldots(47.11)$$

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = \sqrt{g} \ [\ | g_{ij} | = g]$$

மேலும் 47.10-ல் இருந்து

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a}^2 \times \mathbf{a}^3}{[\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3]}, \ \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}^3 \ \mathbf{a}^1}{[\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \mathbf{a}_3]}, \ \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}^1 \times \mathbf{a}^2}{[\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3]} \qquad \ldots\ldots(47.12)$$

எனவே
$$[\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3] = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

வரையறையிலிருந்து $\mathbf{a}^1$ என்பது $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ இவற்றையுடைய தளத்திற்கு செங்குத்து என்பது தெளிவு. அதாவது அது $X^1 =$ மாறிலி என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தான வெக்டர். இது போன்றே $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$ என்பன $X^2 =$ மாறிலி, $X^3 =$ மாறிலி என்ற தளங்களுக்குச் செங்குத்தானவை.

47.10, 48.12 இவற்றின் காரணமாக $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$ என்ற அமைப்பை $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ இவற்றின் தலைகீழ் அடிப்படை அமைப்பு (Reciprocal base system) எனலாம்.

இனி வெக்டர் **A**-ஐ, புது அடிப்படை வெக்டர்கள் மூலமாக எழுதலாம்.

$\mathbf{A} = \mathbf{a}^i A_i$ இங்கே A_i என்பன புது அமைப்பில் **A**-ன் கூறுகள்.

அடுத்து A_i என்பன உடன்மாறித் தன்மை உடையன எனக் காட்டுவோம்.

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_i A^i = \mathbf{a}^i A_i$$

$\mathbf{a}_j$ உடன் புள்ளி பெருக்கல் செய்ய

$$\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i A^i = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}^i A_i$$

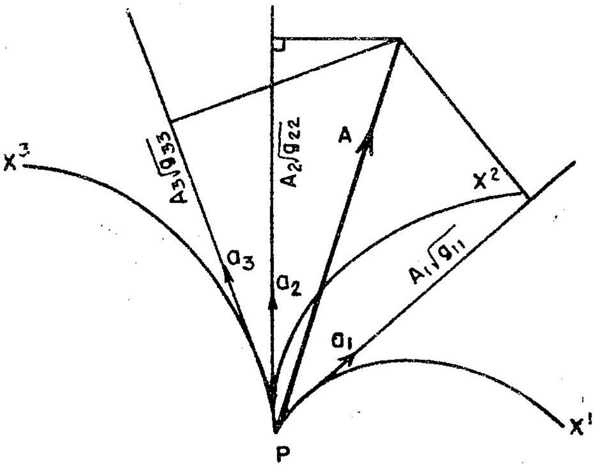
(அ-து) $$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j A^i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j A_i$$

$$g_{ij} A^i = \delta^i_j A_i \text{ [47·6, 37·11 படி]}$$

எனவே $$g_{ij} A^i = A_j \qquad \ldots\ldots(47.13)$$

எனவே A_j என்பன உடன்மாறி வெக்டரின் கூறுகள்.

$\mathbf{A} = \mathbf{a}^i A_i$. ஆனால் A_i என்பனவற்றை **A**-ன் உடன்மாறிக் கூறுகள் என்கிறோம்.



அடுத்து X^1 வளைவின் தொடுகோட்டின்மேல் அதாவது $\mathbf{a}_1$ ன் மேல் **A** ன் குத்து வீச்சை (orthogonal projection) எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\text{அந்த குத்துவீச்சு} = \mathbf{A} . \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}$$

$$= (\mathbf{a}^i A_i) \cdot \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|},$$

$$= \frac{A_1}{|\mathbf{a}_1|} \left[\because \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta^i_j \right]$$

$$= \frac{A_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

அதே போன்று $\frac{A_2}{\sqrt{g_{22}}}, \frac{A_3}{\sqrt{g_{33}}}$ என்பன முறையே $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்ற திசைகளில் A-ன் குத்துவீச்சுகள் ஆகும்.

எனவே A^i என்பன **A** என்ற வெக்டரின் முரண்மாறிக் கூறு கள் ஆனல் $A^1 \sqrt{g_{11}}, A^2 \sqrt{g_{22}}, A^3 \sqrt{g_{33}}$ என்ற இயற்பியல் கூறுகள் **A**-யை மூலைவிட்டமாகவும், X^1, X^2, X^3 இலக்கு வளைவு களின் தொடுகோடுகளைப் பக்கங்களாகவும் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் விளிம்புகளின் நீளங்கள் ஆகும்.

A_i என்பன **A** என்ற வெக்டரின் உடன்மாறிக் கூறுகள் ஆனல் $\frac{A_1}{\sqrt{g_{11}}}, \frac{A_2}{\sqrt{g_{22}}}, \frac{A_3}{\sqrt{g_{33}}}$ என்ற இயற்பியல் கூறுகள் X^1, X^2, X^3 என்ற இலக்கு வளைவுகளின் தொடுகோடுகளின் திசைகளில் **A**-ன் குத்துவீச்சுகளின் நீளங்கள் ஆகும்.

குறிப்பு : ரீமான் வெளியின் அளவைப் பண்புருவை அறிமுகப் படுத்து முன்பு A^i, A_i என்பனவற்றை வெவ்வேறு மாற்றுரு விதி களுக்குக் கட்டுப்படும் வெவ்வேறு வெக்டர்களாகவே வரையறை செய்தோம். A என்ற எழுத்து இரண்டிலும் இருந்தாலும் அவற்றிற்கிடையே தொடர்பு இருக்கவில்லை. அளவைப்பண் புருவை அறிமுகப்படுத்தியபின் $A^i = g^{ij} A_j$ அல்லது

$A_i = g_{ij} A_j$ என்ற தொடர்புகளை நிறுவினோம். மேலும் மேற்கூறிய விளக்கத்தினல் A^i, A_i என்பன **A** என்ற ஒரே வெக்டரின் முரண்மாறி, உடன்மாறிக் கூறுகள் எனக் கண்டோம். ஒரு வகைக் கூறுகள் கொடுக்கப்பட்டால் மறுவகைக் கூறுகளை

எளிதில் கண்டுபிடிக்கலாம். எனவே, இனி A^i, A_i என்பனவற்றை ஒரே வெக்டர் **A** ன் முறையே முரண்மாறி, உடன்மாறிக் கூறுகள் என்றே குறிப்பிடுவோம்.

அடுத்து A^i, A_i இவற்றின் பரிமாணங்கள் அடிப்படை வெக்டர்களின் பரிமாணங்களைப் பொருத்து அமைவன என்பதை நன்கு அறிந்து கொள்வது நல்லது. எடுத்துக் காட்டாக (ρ,ϕ,z) என்பன உருளை இலக்கெண்களானல் A^ρ, A^z, A_ρ, A_z என்ற கூறுகள் நீளத்தின் பரிமாணத்தை உடையன. A^ϕ என்பது பரிமாண மில்லாதது. A_ϕ என்பது பரப்பளவின் பரிமாணமுடையது.

எனவே கணக்குகளில் சூத்திரங்களின் உருவசமச் சீர்த்தன்மை நோக்கியும் கணக்கிடுதலின் எளிமை நோக்கியும் உடன்மாறி முரண்மாறிக் கூறுகளைப் பயன்படுத்தினுலும் முடிவில், விடை எழுதும்போது இயற்பியல் கூறுகளிலேயே எழுதுகிருேம். இயற்பியல் கூறுகள் கொடுக்கப்பட்ட உருப்படியின் பரிமாணத்திலேயே இருப்பனவாகும்.

48. உடன்மாறி, முரண்மாறி—பெயர்க்காரணம்

47.8-ன்படி

$$\mathbf{a}_i = \overline{\mathbf{a}_j}\,\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}$$

இங்கே $\mathbf{a}_i$ என்பன x^i அமைப்பில் X^i என்ற இலக்கு வளைவுகளுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டு வெக்டர்கள், $\overline{\mathbf{a}_j}$ என்பன $\bar{x}^i$ அமைப்பில் $\bar{X}^i$ இலக்குவளைவுகளுக்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டு வெக்டர்கள்.

சமன்பாட்டை $\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}$ ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\,\mathbf{a}_i = \overline{\mathbf{a}_j}\,\delta^j_k$$

$$= \overline{\mathbf{a}_k}$$

எனவே
$$\overline{\mathbf{a}_k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\,\mathbf{a}_i \qquad ......(48.1)$$

இதுவே இலக்கெண் வளைவுகளின் தொடுகோட்டு வெக்டர்களின் மாற்றுரு விதியாகும்.

$\bar{A}^k = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} A_i$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இவற்றில் A_i என்பன தொடுகோட்டு வெக்டர்கள் போன்றே மாறுவதால் A_i-ஐ உடன்மாறி வெக்டர் என்கிறோம்.

$\bar{A}^k = \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} A^i$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இவற்றில் A^i என்பன தொடுகோட்டு வெக்டர்களின் மாற்றத்திற்கு முரண்பாடாக மாறுவதால் A^i–ஐ முரண்மாறி வெக்டர் என்கிறோம்.

குறிப்பு 1: ஒரு வெக்டரின் உடன்மாறி அல்லது முரண் மாறிக் கூறுகளின் உருவ் கணித விளக்கம் முப்பரிமாண வெளியில் தான் கொடுக்கப்பட்டது. இதை N-பரிமாண வெளிக்குக் கற்பனையில் நீட்டிக்கொள்ளலாம். அதே போன்று மேல் தகுநிலைப் பண்புருக்களுக்கும் நீட்டிக்கொள்ளலாம்.

எனவே **A** என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலைப் பண்புருவானால் A^{ij}, A_{ij}, A^i_j என்பன வெவ்வேறு அடிப்படை அமைப்புகளைச் சார்ந்த ஒரே பண்புரு **A**-ன் கூறுகள் ஆகும். கணக்குகளிலும், பண்புருவின் பயன்பாடுகளிலும் நம் வசதிக்கேற்ற உருவினை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

வெக்டரின் இயற்பியல் கூறுகள் என்ற கருத்தை பொதுவாக்கி ஒரு பண்புருவின் இயற்பியல் கூறுகளை வரையறை செய்யலாம்.

பொதுவாக்கினல்

இயற்பியல் கூறு $A_{x^i x^k} = |\mathbf{a_i}| \cdot |\mathbf{a_k}| A^{ik}$ [கூட்டல் மரபு இல்லை]

$= \sqrt{g_{ii}\, g_{kk}}\, A^{ik}$ [கூட்டல் மரபு இல்லை]

அதாவது $A_{x^1 x^1} = g_{11} A^{11}$, $A_{x^1 x^2} + \sqrt{g_{11}\, g_{22}\, A^{12}}$

$A_{x^1 x^3} = \sqrt{g_{11} g_{33}}\, A^{13}$ என்பன இயற்பியல் கூறுகள் ஆகும்.

இதுவே போன்று உடன்மாறிக் கூறுகளுக்கு சரியான இயற்பியல் கூறுகள்

$$A^*_{x^i x^u} = \frac{A_{ik}}{|\mathbf{a_i}|\;|\mathbf{a_k}|} = \frac{A_{ik}}{\sqrt{g_{ii}\, g_{ku}}} \text{ (கூட்டல் மரபு இல்லை)}$$

$$A^*_{x^1 x^1} = \frac{A_{11}}{g_{11}}, \quad A^*_{x^1 x^2} = \frac{A_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}$$ என்பன

குறிப்பு 2 : எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பு செங்கோண அமைப்பாயின் அடிப்படை அமைப்புகள் $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}^i$ மேலும் $g_i = \dfrac{1}{g_{ii}}$ (கூட்டல் மரபு இல்லை) எனவே உடன் மாறி இயற்பியல் கூறுகளும், முரண்மாறி இயல்பியல் கூறுகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமம்.

அதாவது $A^1\sqrt{g_{11}} = \dfrac{A^1}{\sqrt{g_{11}}},\ A^2\sqrt{g_{22}} = \dfrac{A^2}{\sqrt{g_{22}}}$

$$A^{11}g_{11} = \frac{A_{11}}{g_{11}},\quad A^{12}\sqrt{g_{11}\ g_{22}} = \frac{A_{12}}{\sqrt{g_{11}\ g_{22}}}$$ என்க.

குறிப்பு 3 : பொதுப்பட நோக்குங்கால் $\mathbf{a}_i$ என்பன எப்பொழுதும் அலகு வெக்டர்களாக இருப்பதில்லை. $\mathbf{e}_i$ என்பது $\mathbf{a}_i$-க்குச் சரியான இலகு வெக்டர் ஆனுல்

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{|\ \mathbf{a}_i\ |} = \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{g_{ii}}}$$ (கூட்டல் மரபு இல்லை)

அதாவது $\mathbf{a}_1 = \sqrt{g_{11}}\ \mathbf{e}_1 = h_1\mathbf{e}_1$ என்க.

$$\mathbf{a}_2 = \sqrt{g_{22}}\ \mathbf{e}_2 = h_2\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a}_3 = \sqrt{g_{33}}\ \mathbf{e}_3 = h_3\mathbf{e}_3$$

h_1, h_2, h_3 அதாவது $\sqrt{g_{11}}, \sqrt{g_{22}}, \sqrt{g_{33}}$ என்பனவற்றை அளவு காரணிகள் (scale factors) என்கிறோம்.

49. வளைவின் நீளம்

அளவைப் பண்புருவின் உதவிகொண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே ஒரு வளைவின் நீளத்தைக் கணக்கிடலாம்.

V_N-ல் t-ஐ ஒட்டளவாகக் கொண்ட

$x^i = x^i\ (t)$ என்ற வளைவை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதன் அளவை உரு,

$(ds)^2 = e\ g_{mn}\ dx^m\ dx^n$ ஆகும்.

எனவே $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{eg_{mn}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}}$$

எனவே $t = t_1,\ t = t_2$ களுக்குச் சரியான புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள வளைவின் நீளம் s கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{eg_{mn}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}}\ dt \qquad \ldots\ldots(49.2)$$

ஒரு வளைவின் வழியே $g_{mn}\frac{dx^m}{dt}\cdot\frac{dx^n}{dt}=0$ ஆக இருந்தால் $t=t_1$, $t=t_2$ களுக்குச் சரியான புள்ளிகள் ஒன்றின் மேல் ஒன்று அமையாது இருந்தாலும் புள்ளிகள் ஒன்றுக்கொன்று பூச்சிய தூரத்தில் உள்ளதாகக் கொள்கிறோம். அவ்வாறான வளைவின் பகுதியை இல்லாநிலைப் (null) பகுதி என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= C\int \gamma\cos\theta\cos\psi\,dt\\ x^2 &= C\int \gamma\cos\theta\sin\psi\,dt\\ x^3 &= C\int \gamma\sin\theta\,dt\\ x^4 &= \int \gamma\,dt \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(49.3)$$

γ, θ, ψ என்பன t-ன் சார்புகளானால் 49.3-ல் கொடுக்கப்பட்ட வளைவு V_4-ல்

$(ds)^2=-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2+c^4(dx^4)^2$-ஐ அளவையாக உடைய மெய்யான இல்லாநிலை வளைவு (Real null curve) ஆகும்.

மிகை-உறுதி உரு உள்ள அளவைகள் உடைய ரீமான் வெளி களில் மெய்யான இல்லாநிலை வளைவுகள் இருக்கமுடியாது என்பது தெளிவு.

ஒரே வளைவில், சுட்டி e ன் மதிப்பு$+1$ஆக இருக்கும் பகுதி களும். e ன் மதிப்பு-1 ஆக இருக்கும் பகுதிகளும் இல்லாநிலைப் பகுதிகளும் இருக்கக்கூடும். அவ்வாறானால் அந்த வளைவின் நீளம் இந்தப் பகுதிகளின் நீளங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும். இல்லா நிலைப் பகுதியின் நீளம் பூச்சியம் ஆதலின் அது இந்தக்கூட்டுத் தொகைக்கு எதையும் சேர்ப்பதில்லை.

குறிப்பு : 49.2 ன்படி

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{e g_{mn}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}}\;dt$$

இதில் மேல் எல்லையை t ஆக மாற்றினால்

$$s=\int_{t_1}^{t}\sqrt{e g_{mn}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}}\;dt \qquad \ldots\ldots(49.4)$$

அதாவது s என்பது t ன் சார்பாகிறது.

எனவே t-யை s-ல் எழுதலாம்.

எனவே t-ன் சார்புகளாக உள்ள புள்ளியின் இலக்கெண்கள் x^i களை s ன் சார்புகளாக எழுதலாம். இங்கு s என்பது $t=t_1$-க்கு சரியான நிலைப் புள்ளியிலிருந்து $t=t$-க்கு உள்ள வில்தூரம்.

இவ்வாறு x^i களை s ன் சார்புகளாக எழுதினால் 49.1 ல் இருந்து

$$g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\cdot\frac{dx^n}{ds}=1 \qquad \ldots\ldots(49.5)$$

50. ஒரு வெக்டரின் அளவு

dx^i என்ற முரண்மாறி வெக்டரின் நீளம் ds-ஐ வரையறை செய்யும் அளவை உருவின் வரையறையை ஒப்பு நோக்கி, அதுவே போல் முரண்மாறி வெக்டர் A^i-ன் நீளம் அல்லது அளவு **A**ஐ கீழ்க் கண்ட சமன்பாட்டால் வரையறை செய்கிறோம்.

$$(A)^2=e_{(A)}\ g_{ij}\ A^i\ A^j \qquad \ldots\ldots(50.1)$$

இங்கு e_A என்பது A-ஐ மெய்யாக்கும் சுட்டி, A-ன் அளவி ஒரு மாற்றமிலி.

முப்பரிமாண வெளியில் செவ்வக தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக் கொண்டால் மேற்கூறிய வரையறை நமக்குப் பழக்கமான உருவகணித வெக்டரின் அளவைக் குறிப்பது தெளிவு. இதே போன்று, B_i-ஐ கூறுகளாகக் கொண்ட வெக்டரின் நீளம் B

$$(B)^2=e_{(B)}\ g^{ij}\ B_i\ B_j \qquad \ldots\ldots(50.2)$$

என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது.

வரையறை : ஒரு வெக்டரின் நீளம் அல்லது அளவு "ஒன்று" ஆக இருந்தால் அதனை அலகு வெக்டர் (Unit vector) என்கிறோம்.

$$49.5\text{-ன் படி}\quad g_{mn}\frac{dx^m}{ds}\cdot\frac{dx^n}{ds}=1.$$

எனவே $\dfrac{dx^i}{ds}$ என்பது x^i என்ற புள்ளியில் உள்ள முரண்மாறி அலகு வெக்டர். $\dfrac{dx^i}{ds}$ என்பது x^i என்ற புள்ளியில் உள்ள அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர்.

வரையறை : ஒரு வெக்டரின் அளவு பூச்சியம் ஆனால் அதனை இல்லாநிலை வெக்டர் (null vector) என்கிறோம். இல்லாநிலை வளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டு வெக்டர் இல்லாநிலை வெக்டர் ஆகும்.

குறிப்பு : A^i, A_j என்பன துணை வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். அவ்வாருயின்

$$e_{(A)}\, g_{ij}\, A^i\, A^j = e_{(A)}\, g_{ij}\, g^{ik}\, A_k\, g^{jl}\, A_l$$

$$= e_{(A)}\, \delta^k_j\, g^{jl}\, A_k\, A_l$$

$$= e_{(A)}\, g^{kl}\, A_k\, A_l$$

$$= e_{(A)}\, g^{ij}\, A_i\, A_j$$

அதாவது $e_{(A)}\, g_{ij}\, A^i\, A^j = e_{(A)}\, g^{ij}\, A_i\, A_j$ ......(50.3)

எனவே துணை வெக்டர்களின் அளவுகள் சமம்.

மேலும் $(A)^2 = e_{(A)}\, g_{ij}\, A^i\, A^j = e_{(A)}\, A_j\, A^j$

$(A)^2 = e_A\, g^{ij}\, A_i\, A_j = e_{(A)}\, A^j\, A_j$ ......(50.4)

எனவே A என்ற வெக்டரின் நீளம் அதன் முரண்மாறி, உடன் மாறிக் கூறுகளின் அளவிப் பெருக்கற்பலனின் $e_{(A)}$ மடங்கு ஆகும்.

51. இரு வெக்டர்களிடையே உள்ள கோணம்

இரு வெக்டர்களின் இடையே உள்ள கோணத்தை இப்பொழுது வரையறை செய்வோமாக. உறுதியிலா-கோட்டு மூலம் உள்ள வெளியினில் கோணத்தை வரையறை செய்ய நாம் முயற்சித்தால் அதனுல் பல சிக்கல்கள் எழுகின்றன. எனவே மிகை-உறுதி கோட்டு மூலம் உடைய வெளியினில் மட்டுமே நாம் கோணத்தை வரையறை செய்கிறோம்.

வரையறை : U^i, V^i என்பன இரு அலகு வெக்டர்களானுல், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள θ என்ற கோணம், கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படுகிறது.

$$\cos\theta = g_{ij}\, U^i\, V^j = U_i\, V^i \qquad ......(51.1)$$

அல்லது $\cos\theta = g^{ij}\, U_i V_j = U^j V_j$ ......(51.2)

முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு செவ்வக தெக்காட்டின் இலக் கெண் அமைப்பில் (l, m, n) (l^1, m^1, n^1) என்ற திசை கொசைன் கள் உள்ள அலகு வெக்டர்களின் இடையே உள்ள கோணம் θ,

$\cos\theta = ll^1 + mm^1 + nn^1$ ஆல் கொடுக்கப்படுகிறது. 51.1, 51.2 இவற்றில் கொடுக்கப்பட்ட வரையறைகள் இத்துடன் ஒத்துப் போவதை அறிக.

அடுத்து A^i, B^i என்பன முறையே **A, B** என்ற வெக்டர்களின் முரண்மாறிக் கூறுகளாக இருக்கட்டும்.

$U^i = \frac{A^i}{A}$, $V^i = \frac{B^i}{B}$ என்பன அவற்றிற்குச் சரியான அலகு வெக்டர்கள்.

எனவே A^i, B^i இவற்றிற்கு இடையே உள்ள θ என்ற கோணம் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்படும.

$$\cos\theta = g_{ij}\, U^i\, V^j = g_{ij}\, \frac{A^i}{A} \cdot \frac{B^i}{B}$$

அதாவது
$$AB\cos\theta = g_{ij}\, A^i\, B^j$$
$$AB\cos\theta = A_j\, B^j = A^i B_i \qquad \ldots\ldots(51.3)$$

அல்லது
$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\, A^i\, B^j}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\, A^i\, B^j}{\sqrt{e_{(A)}\, g_{ij}\, A^i\, A^j}\,\sqrt{e_{(B)}\, g_{ij}\, B^i\, B^j}} \qquad \ldots\ldots(51.4)$$

குறிப்பு 1 : $\theta = 90^\circ$ அதாவது $\cos\theta = 0$ ஆனால் இரு வெக்டர்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை **என்று** சொல்கிறோம்.

51.4 ல் இருந்து A^i, B^i என்ற இரு வெக்டர்கள் செங்குத்துத் தன்மை உடையவனவாக இருக்கத் தேவையும் போதுமானதும் ஆன கட்டுப்பாடு

$$g_{ij}\, A^i\, B^j = 0 \qquad \ldots\ldots(51.\ 5)$$

என்றாகிறது.

குறிப்பு 2 : இரு வெக்டர்களில் ஒன்று இல்லாநிலை வெக்டராயின், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணத்தை நாம் வரையறை செய்வதில்லை. எனினும் இரு வெக்டர்களுமே இல்லாநிலை வெக்டர்களாயின் 51.5 ல் கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாட்டை அவை நிறைவு செய்வதாகக் கொண்டு, அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் கொள்கிறோம். இதிலிருந்து ஒரு இல்லா நிலைவெக்டர் தற்செங்குத்துத் தன்மை (self-orthogonal) உடையது என்றாகிறது.

52. தேற்றம்

ரீமான் வெளியில் அளவை உரு மிகை-உறுதி உருவானால், இரு மெய்யான வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ளகோணம் மெய்யானது ஆகும்.

நிருபணம்: A^i, B^i என்ற இரு மெய்யான வெக்டர்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ என்க.

λ, μ என்பன மெய்யான அளவிகளாக இருக்கட்டும்.

$\lambda A^i+\mu B^i$ என்ற வெக்டரை எடுத்துக்கொள்வோம்.

வெளியின் அளவை உரு மிகை-உறுதித் தன்மை உடையது.

எனவே எல்லா λ, μக்களுக்கும் $\lambda A^i+\mu B^i$ன் அளவு $\geqslant 0$.

(அ-து) $|\lambda A^i+\mu B^i| \geqslant 0$.

எனவே $g_{ij}(\lambda A^i+\mu B^i)(\lambda A^j+\mu B^j) \geqslant 0$.

(அ-து) $\lambda^2(g_{ij} A^i A^j)+2\mu\lambda(g_{ij} A^i B^j)+\mu^2(g_{ij} B^i B^j) \geqslant 0$.

இது $\frac{\lambda}{\mu}$ல் இருபடிக் கோவை. எனவே அதன் தன்மைகாட்டி $\leqslant 0$ ஆக இருக்கும்.

எனவே

$$4(g_{ij} A^i B^j)^2-4(g_{ij} A^i A^j)(g_{ij} B^i B^j) \leqslant 0 \qquad \ldots\ldots(52.1)$$

எனவே $(AB\cos\theta)^2-A^2B^2 \leqslant 0$

(அ-து) $(AB\cos\theta)^2 \leqslant A^2B^2$

$$\therefore \cos^2\theta \leqslant 1$$

$$\therefore |\cos\theta| \leqslant 1$$

எனவே θ மெய்யானது

குறிப்பு: $A^i=KB^i$ ஆகும்போது 52.1 சமன்பாடு ஆகிறது. எனவே $A^i=KB^i$ ஆகும்போது $\cos\theta=\pm 1$.

53. இரு வெக்டர்களின் அளவி பெருக்கற்பலன்

வரையறை: A^i, A_i என்பன வெக்டர் A-ன் முரண்மாறி, உடன் மாறிக் கூறுகள். B^i, B_i என்பன வெக்டர் B-ன் கூறுகள். A^i, B_i அல்லது A_i, B^i இவற்றின் அளவி பெருக்கற்பலனை A, B இவற்றின் அளவி அல்லது புள்ளி பெருக்கற் பலன் என்று சொல்கிறோம். அந்த பலனை $A.B$-ஆல் குறிக்கிறோம்.

எனவே $A.B=A^iB_i=A_iB^i$

குறிப்பு: 51.3-ன் படி

$$A.B=A^iB_i=AB\cos\theta.$$

எனவே மேலே கொடுக்கப்பட்ட வரையறை வழக்கமான வெக்டர் கணித வரையறையுடன் ஒத்திருக்கிறது.

ஒரு வெக்டர் A-ஐ அதனுலேயே புள்ளி பெருக்கற்பலன் கண்டால் அதன் நீளத்தின் வர்க்கம் கிடைக்கிறது.

அதாவது $(A)^2 = A, A = A^i A_i$.

வரையறை: U என்பது ஓர் அலகு வெக்டராளுல், $A.U$-வை U-ன் மேல் A-ன் வீச்சு அல்லது U-ன் திசையில் A-ன் குத்துப்பிரிவு (Resolved Part) என்கிருேம்.

குறிப்பு: $\frac{dx^i}{ds}$ என்ற அலகு தொடுகோட்டு வெக்டரின் மேல் ϕ-ன் சாய்வு விகிதம் $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ ன் வீச்சு $= \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{ds}$

$$= \frac{d\phi}{ds} \text{ (நுண் கணிதப்படி).}$$

$\frac{d\phi}{ds}$ வளைவில் வில்தூரம் மாறும்பொழுது ϕ மாறும் வீதத்தைக் குறிக்கிறது. அதை $\frac{dx^i}{ds}$ ன் திசையில் ஏற்படும் ϕ ன் வகைக்கெழு என்கிருேம். எனவே $\frac{d\phi}{ds}$ என்பது திசை-வகைக்கெழு ஆகும்.

54. இரு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கற்பலன்

வரையறை: e_{ijk}, e^{ijk} என்பன வரிசைமாற்ற குறியீடுகள் $g = | g_{mn} |$

ε_{ijk}, ε^{ijk} என்னும் உருப்படிகளை பின்வருமாறு வரையறை செய்கிருேம்.

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\, e_{ijk}$$

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, e^{ijk}$$

ε_{ijk}, ε^{ijk} இவற்றை தனித்த பண்புருக்கள் என எளிதாக நிரூபிக்கலாம். இவற்றை இனி வரிசைமாற்றப் பண்புருக்கள் (permutation tensors) என்றே குறிப்பிடுவோம்.

வரையறை : A_i, B_i என்பன முறையே A, B என்ற வெக்டர் களின் கூறுகள்.

$$C^i = \varepsilon^{ijk} A_j B_k \text{ என்க.}$$

C^i என்னும் இந்த முரண்மாறி வெக்டரை A, B இவற்றின் **வெக்டர்** அல்லது **சிலுவை பெருக்கற்பலன்** (vector or cross product) என்கிறோம்.

மேலே கொடுக்கப்பட்ட பண்புரு கணிதத்தின் வெக்டர் பெருக்கற்பலனின் வரையறையும் நமக்குப் பழக்கமான வெக்டர் கணிதத்தின் வெக்டர் பெருக்கற்பலனும் ஒன்று என நிரூபிப்போம். இதை மூன்று பகுதிகளாக நிரூபிக்கிறோம். (i) C-ன் நீளம் $AB \sin\theta$ (ii) A, B இரண்டிற்கும் C செங்குத்தாக உள்ளது (iii) A, B, C மூன்றும் வலக்கை அமைப்பு (Right-handed system) உடையன என்பன அப்பகுதிகளாம்.

(i) $C^i = \varepsilon^{ijk} A_j B_k$ (வரையறைப்படி)

எனவே $C_i = \varepsilon_{ijk} A^j B^k$ (நூற்பிரிவு 46-ல் உள்ள முடிவுகளின் படி, சுட்டிணைப்புகளை ஏற்ற, இறக்க)

எனவே C ன் நீளத்தின் வர்க்கம்

$$(C)^2 = C^i C_i = \varepsilon^{ijk} A_j B_k \varepsilon_{ipq} A^p B_q$$

$$= \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ipq} A_j A^p B_k B^q$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} \sqrt{g}\, e_{ipq} A_j A^p B_k B^q$$

$$= e^{ijk} e_{ipq} A_j A^p B_k B^q$$

$$= \left(\delta^j_p \delta^k_q - \delta^j_q \delta^k_p\right) A_j A^p B_k B^q$$

$$= \left(\delta^j_p A_j A^p\right)\left(\delta^k_q B_k B^q\right) - \left(\delta^j_q A_j B^q\right)\left(\delta^k_p A^p B_k\right)$$

$$= (A_q A^p)(B_q B^q) - (A_q B^q)(A^k B_k)$$

$$= A^2 B^2 - AB \cos\theta \, AB \cos\theta.$$

$$= (AB)^2 - (AB \cos\theta)^2$$

$$= (AB \sin\theta)$$

எனவே C ன் நீளம் $= A B \sin\theta$.

(ii) அடுத்து

$$C^i A_i = \varepsilon^{ijk} A_j B_k A_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} A_j B_k A_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0$$

எனவே C, A க்கு செங்குத்தானது. இவ்வாறே C, Bக்கு செங்குத்தானது என நிரூபிக்கலாம்.

எனவே A, B இவற்றிற்கு C செங்குத்தானது.

(iii) அடுத்து C_i ன் கூறுகள் $\varepsilon^{ijk} A_j B_k$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1, -A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

இனி $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ ன் மதிப்பு மிகை.

எனவே A, B, C மூன்றும் வலக்கை அமைப்பைப் பெற்றன.

எனவே C^i ன் வரையறை நமக்குப் பழக்கமான வரையறையை ஒத்திருக்கிறது.

55. ஒரு பண்புருவின் முதன்மை அச்சுகள் (The Principal axes of a tensor)

A_{ij} என்பது யாதாமொரு இரண்டாம் அடைவு சமச்சீர்ப் பண்புரு என்க.

$$A_{ij} L^i = B_j \qquad ......(55.1)$$

என்னும் பண்புரு சமன்பாட்டிலிருந்து வெக்டர் L ஐ A_{ij} ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்யும்பொழுது வெக்டர் B கிடைக்கிறது என்றறிகிறோம். இன்னும் விளக்கமாக A_{ij} ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்வது L ஐ B ஆக மாற்றுகிறது எனலாம். அதாவது வெக்டர் L ஐ அதன் திசையையும் அளவையும் மாற்றி வெக்டர் B ஆக மாற்றுகிறது. அதாவது A_{ij} ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்வது L ன் நீளத்தை மாற்றுவதோடு அல்லாமல் அதைச் சுழலவும் செய்கிறது. அடுத்து, A_{ij} ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்யப்படும்பொழுது சுழற்சி

வயப்படாமல் நீளத்தில் மட்டுமே மாறும் வெக்டர்கள் இருக்கக் கூடும். அவைபற்றிக் காண்போம். L என்பது அம்மாதிரியான ஒரு வெக்டர் எனில்

$$A_{ij}\, L^i = \lambda\ L_j \qquad \text{......(55.2)}$$

ஆக இருக்க வேண்டும். இங்கே λ என்பது அளவி

அதாவது $A_{ij}\, L^i = \lambda\ g_{ij}\, L^i$

$$(\text{அ-து}) \quad (A_{ij} - \lambda\ g_{ij})\, L^i = 0 \qquad \text{......(55.3)}$$

55.3-ல் N சமன்பாடுகள் உள்ளன. இவற்றைத் தீர்வு கண்டால் L^i கிடைக்கும். $L^1 = L^2 = \ldots = L^N = 0$ அதாவது $L^i = 0$ என்ற சாரமற்ற (trivial) தீர்வை ஒதுக்கினுல் 55.3-க்கு தீர்வு இருக்க வேண்டுமானுல்

$$|\, A_{ij} - \lambda g_{ij}\, | = 0 \qquad \text{......(55.4)}$$

ஆக இருக்கவேண்டும்.

இது λ-ல் N-வது படிச் சமன்பாடு. இனி, $\bar{x}^i$ அமைப்பிற்கு இலக்கெண் நிலைமாற்றம் செய்தால் 55.4 கீழ்கண்டவாறு மாறுகிறது :

$$\left| (\bar{A}_{lk} - \lambda\, \bar{g}_{lk}) \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \right| = 0$$

$$(\text{அ-து}) \qquad \left| \bar{A}_{lk} - \lambda \bar{g}_{lk} \right| \left| \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \right| \left| \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \right| = 0$$

$$|\, \bar{A}_{lk} - \lambda \bar{g}_{lk}\, |\, J^2 = 0.$$

ஆனுல் $J \neq 0$.

$$\text{எனவே} \quad |\, \bar{A}_{lk} - \lambda\, \bar{g}_{lk}\, | = 0 \qquad \text{......(55.5)}$$

சமன்பாடுகள் 55.4, 55.5 களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது, 55.4 ன் மூலங்கள் (Roots) $\lambda_{(K)}$ மாற்றமிலிகள் என்பது தெளிவு [பல்வேறு மூலங்களைக் குறிக்க ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துகளை அடைப்புக் குறிகளுக்குள் எழுதுகிறோம். இத்தகைய சுட்டிணைப்புகளுக்கு பண்புருவில் வரும் சுட்டிணைப்புகளின் தன்மைகள் கிடையாது. கூட்டல் மரபும் பொருந்தாது] எனவே சமன்பாடு 55.4-ன் தீர்வு $\lambda_{(1)}\ \lambda_{(2)} \ldots\ldots \lambda_{(N)}$ என்னும் N மூலங்கள் ஆகும்.

$\lambda_{(K)}$ என்பது ஓர் எளிய மூலமாக இருக்கட்டும். $L^i_{(K)}$ என்னும் வெக்டர் $\lambda_{(K)}$ க்குச் சரியானதும் 55.3 சமன்பாட்டை நிறைவு செய்வதுமாகிய வெக்டராக இருக்கட்டும்.

$$\text{அதாவது} \quad (A_{ij} - \lambda_{(K)}\, g_{ij})\, L^i_{(K)} = 0 \qquad \text{......(55.6)}$$

இந்த N சமன்பாடுகள் $L^i_{(K)}$ -ன் N மதிப்புகளின் விகிதங்களை உறுதி செய்கின்றன. இனி இந்த விகிதங்கள் $L^i_{(K)}$ களை அலகு வெக்டர்களாக இருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்வோம்

அதாவது $g_{ij}\, L^i_{(K)}\, L^j_{(K)} = e_{(K)}$ ......(55.7)

இங்கே $e_{(K)}$ என்பது $L^i_{(K)}$ ன் சுட்டி. இதைப்போலவே $\lambda_{(M)}$ என்ற எளிய மூலத்திற்குச் சரியான $L^i_{(\mathrm{M})}$ என்ற அலகு வெக்டரையும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

அவ்வாறாயின் $(A_{ij} - \lambda_{(M)}\, g_{ij})\, L^i_{(M)} = 0$ ......(55.8)

$$g_{ij}\, L^i_{(M)}\, L^j_{(M)} = e_{(M)} \qquad ......(55.9)$$

அடுத்து $\lambda_{(K)} \neq \lambda_{(M)}$ என்று கொள்வோம். 55.6 ஐ $L^j_{(M)}$ ஆலும் 55.8 ஐ $L^j_{(K)}$ ஆலும் அகப்பெருக்கல் செய்து கழித்தால்

$$g_{ij}\, L^i_{(K)}\, L^j_{(M)} = 0 \qquad ......(55.10)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இதிலிருந்து $L^i_{(K)}$ம் $L^j_{(M)}$ம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என்று தெரிகிறது. 55.4 ன் மூலங்கள் யாவும் எளிய மூலங்கள். அதாவது ஒன்றுக்கொன்று சமமில்லாத தனித்தனி மூலங்கள் ஆக இருந்தால், g உடன்மாறி சமச்சீர்ப் பண்புரு A_{ij}, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான தன்னேரில்லாத N அலகு வெக்டர்களைத் தீர்மானிக்கிறது. இந்த அலகு வெக்டர்களின் திசைகளை A_{ij} ஆல் உறுதி செய்யப்படும் **முதன்மைத் திசைகள்** (principal directions) என்கிறோம். இத்திசைகளில் உள்ள அச்சுகளை A_{ij} ன் **முதன்மை அச்சுக்கள்** என்கிறோம். $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ மிகை உறுதி உரு எனில் 55-4 ன் மூலங்கள் யாவும் மெய்யானவை. எனவே மிகை உறுதி அளவை உரு உள்ள வெளிக்கு முதன்மைத் திசைகள் மெய்யானவை.

அடுத்து

$$\lambda = \frac{A_{ij}\, L^i\, L^j}{g_{lm}\, L^l\, L^m} \qquad ......(55.11)$$

ஆல் வரையறை செய்யப்பட்ட மாற்றமிலி λ வை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\frac{\partial \lambda}{\partial L^j}=0$ ஆக இருக்கும்பொழுது அதன் மீப்பெரு, மீச்சிறு (maxima & minima) மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

அதாவது

$$\frac{g_{lm}\, L^l L^m\, (A_{ij}\, L^i) - A_{ij}\, L^i L^j\, (g_{lm} L^l)}{(g_{lm}\, L^l L^m)^2}=0$$

இதை

$$A_{ij}\, L^i\, (g_{lm}\, L^l\, L^m) - g_{ij}\, L^i\, (A_{lm}\, L^l\, L^m)=0$$

என எழுதலாம்.

அதாவது $(A_{ij}-\lambda g_{ij})\; L^i=0$

இதிலிருந்து L^i-ஐ நீக்க

$| A_{ij}-\lambda g_{ij} | =0$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே A_{ij} ஆல் உறுதி செய்யப்படும் முதன்மைத் திசைகளுக்குச் சரியான மதிப்புள்ள λ-க்கள், λன்-மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகள் ஆகும்.

குறிப்பு 1: $\lambda_{(K)}$ என்பது தனி மூலமாக இல்லாது மீண்டும் வரும் மூலமாக இருந்தால், சமன்பாடுகள் 55.6, 55.7-ஐக் கொண்டு $L^i_{(K)}$ தன்னேரில்லாதபடி உறுதி செய்ய முடியாது.

குறிப்பு 2: ஒரு புள்ளியில் $A_{ij}=\lambda g_{ij}$ ஆனல் அந்தப் புள்ளியில் முதன்மைத் திசைகளை உறுதி செய்ய முடியாது. ஒரு வெளியினில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $A_{ij}=\lambda g_{ij}$ ஆனல் அந்த வெளியை ஓரினத்தன்மை (homogeneous) உடையது என்கிறோம்.

56. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1: ஒரு வெளியின் அளவை உரு

$$(ds)^2=2(dx^1)^2-3(dx^2)^2+4(dx^3)^2-dx^2dx^3+6dx^3dx^1$$

என்றால் (i) g_{mn} (ii) g (iii) g^{mn} இவற்றைக் கண்டுபிடி:

$(ds)^2=2(dx^1)^2-3(dx^2)^2+4(dx^3)^2-dx^2dx^3+dx^3dx^1$

இங்கு $g_{11}=2,\ g_{22}=-3,\ g_{33}=4$

g_{mn} சமச்சீர் பண்புரு எனவே $2g_{23}=-1$

$2g_{31}=6,\ g_{13}=g_{31}=3$, மற்றவை $=0$

$$\therefore g_{mn}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix} = 3\tfrac{1}{2} \neq 0.$$

$$g^{11} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} -3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix} = \tfrac{2}{7}\left(-12-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{7}{2}$$

$$g^{12} = g^{21} = 0$$

$$g^{31} = g^{13} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \tfrac{2}{7} \times 9 = \tfrac{18}{7}$$

$$g^{22} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\tfrac{2}{7}$$

$$g^{23} = g^{32} = -\frac{1}{g}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \tfrac{2}{7}$$

$$g^{33} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -\tfrac{3}{7}$$

எனவே $g^{mn} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 0 & \frac{18}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{18}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$

கணக்கு 2 : $y^1 = x^1 x^2 \cos x^3$, $y^2 = x^1 x^2 \sin x^3$, $y^3 = \frac{1}{2}\left[(x^1)^2 - (x^2)^2\right]$ என்ற பரவளைய இலக்கெண்களுக்கு அளவை உரு $(ds)^2 = \left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right]\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2\right] + (x^1 x^2)^2 (dx^6)^2$ என்று காட்டுக.

இங்கு $y^1 = x^1 x^2 \cos x^3$, $y^2 = x^1 x^2 \sin x^3$, $y^3 = \frac{1}{2}\left[(x^1)^2 - (x^2)^2\right]$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x^2 \cos x^3 & x^2 \sin x^3 & x^1 \\ x^1 \cos x^3 & x^1 \sin x^3 & -x^2 \\ -x^1 x^2 \sin x^3 & x^1 x^2 \cos x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

வரையறையின்படி

$$| g_{mn} | = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \quad \text{நிரையை நிரையால் பெருக்க}$$

$$| g_{mn} | = \begin{vmatrix} (x^2)^2+(x^1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2+(x^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2\ (x^2)^2 \end{vmatrix}$$

எனவே $g_{11}=g_{22}=(x^1)^2+(x^2)^2$

$$g_{33}=(x^1x^2)^2, \text{ மற்றவை}=0$$

$$\therefore (ds)^2=[(x^1)^2+(x^2)^2]\ [(dx^1)^2+(dx^2)^2]+(x^1x^2)^2\ (dx^3)^2$$

கணக்கு 3: ஒரு செங்கோண இலக்கெண் அமைப்பிற்கு $g^{ii}=\dfrac{1}{g_{ii}}$ (கூட்டல் மரபு இல்லை) என நிரூபி.

இலக்கெண் அமைப்பு செங்கோண அமைப்பு ஆதலால் $m\neq n$ ஆக இருக்கும்போது

$$g_{mn}=0 \qquad \ldots\ldots(56.1)$$

$g=|g_{mn}|\neq 0$ ஆகவே g_{ii}க் கூறுகள் பூச்சியமில்லை. எனவே $\dfrac{1}{g_{ii}}$ களை கண்டுபிடிக்கலாம். மேலும் $|g^{mn}|=\dfrac{1}{g}\ \neq 0 \quad [\because g\neq 0]$

$$\ldots\ldots(56.2)$$

இனி, $g^{mn}=\dfrac{g_{mn} \text{ ன் இணைச்சினை}}{g}=0$, $m\neq n$ எனில்

$$\ldots\ldots(56.3)$$

56.2, 56.3 இவற்றால் $g^{ii}\neq 0$ என்பது தெளிவு

மேலும் $g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$

எனவே $g^{ii}=\dfrac{1}{g_{ii}}$

கணக்கு 4: ஒரு முப்பரிமாண இலக்கெண் அமைப்பில் θ_{12} θ_{23}, θ_{31} என்பன இலக்கு வளைவுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணங்கள் ஆனால்

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\, g_{22}}},$$

$$\cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}\, g_{33}}}, \quad \cos\theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}\, g_{11}}}$$

என நிரூபி. மேலும் ஒரு செங்கோண இலக்கெண் அமைப்பில் $g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$ எனவும் நிரூபி.

$$g_{mn} = \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{a}_n \quad (47{\cdot}6 \text{ ன் படி})$$

எனவே $\qquad g_{12} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$

$$= \sqrt{g_{11}}\ \sqrt{g_{22}}\ \cos\theta_{12}$$

எனவே $\qquad \cos\theta_{12} = \dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}\, g_{22}}}$

இவ்வாறே மற்றவற்றையும் நிரூபிக்கலாம். மேலும் $\theta_{12}=90^\circ$ ஆனால் $\cos\theta_{12}=0$

எனவே $g_{12}=0$

இதுபோன்றே $\theta_{23}=\theta_{31}=90^\circ$ ஆனால் $g_{23}=g_{31}=0$.

எனவே செங்கோண இலக்கெண் அமைப்பில் $g_{12}=g_{23}=g_{31}=0$.

மேலும் g_{mn} சமச்சீர் உடையதால் $g_{21}=g_{32}=g_{13}=0$.

கணக்கு 5: θ_{23} என்பது $0X^2$, $0X^3$ என்ற இலக்கெண் வளைவுக்கிடையே உள்ள கோணம் எனில்

$$\sin^2\theta_{23} = \frac{g g^{11}}{g_{22}\, g_{33}}$$

கணக்கு 4ன் படி

$$\cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}\, g_{33}}}$$

எனவே $\sin^2\theta_{23} = 1 - \dfrac{(g_{23})^2}{g_{22}\, g_{33}}$

$$= \frac{g_{22}\,g_{33} - (g_{23})}{g_{22}\, g_{33}}$$

$$= \frac{|g_{mn}| \text{ ல் } g_{11} \text{ ன் சிறி}}{g_{22}\, g_{33}} \qquad [\text{சிறி : minor}]$$

$$= \frac{g g^{11}}{g_{22}\, g_{33}}.$$

கணக்கு 6 :

$$1-\cos^2\theta_{23}-\cos^2\theta_{31}-\cos^2\theta_{12}+2\cos\theta_{12}\ \cos\theta_{23}\ \cos\theta_{31}$$

$$=\frac{g}{g_{11}g_{22}g_{33}}$$ என நிரூபி.

கணக்கு 4ன் படி

$$\text{இடதுபக்கக் கோவை}=1-\frac{(g_{23})^2}{g_{22}g_{33}}-\frac{(g_{31})^2}{g_{33}g_{11}}-\frac{(g_{12})^2}{g_{11}g_{22}}+\frac{2g_{12}\,g_{23}\,g_{31}}{g_{11}\,g_{22}\,g_{33}}$$

$$=\frac{g_{11}g_{22}g_{33}-g_{11}(g_{23})^2-g_{22}(g_{31})^2-g_{33}(g_{12})^2+2g_{12}g_{23}g_{31}}{g_{11}\,g_{22}\,g_{33}}$$

$$=\frac{|\,g_{mn}\,|\text{ ன் விரிவு}}{g_{11}\,g_{22}\,g_{33}}=\frac{g}{g_{11}g_{22}g_{33}}.$$

கணக்கு 7 : A^i, B^i என்ற இரு வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் θ ஆனால்

$$\sin^2\theta=\frac{[e_{(A)}\,e_{(B)}\,g_{hi}\,g_{jk}-g_{hk}\,g_{ij}]\ A^hA^i\ B^jB^k}{e_{(A)}\,e_{(B)}\,g_{hi}\,g_{jk}\ A^hA^i\ B^jB^k}$$

என நிரூபி.

$$\cos\theta=\frac{g_{ij}\,A^i\,B^j}{\sqrt{e_{(A)}\ e_{(B)}\,g_{lm}\,A^lA^m\,g_{rs}\,B^rB^s}}$$

$$\sin_2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=\frac{1-(g_{ij}\ A^iB^j)^2}{e_{(A)}\ c_{(B)}\,g_{lm}\ A^lA^m\,g_{rs}\ B^rB^s}$$

பகுதியில் போலி சுட்டிணைப்புகளை மாற்றி அமைத்தால்

$$\sin^2\theta=1-\frac{g_{hk}\,g_{ij}\ A^h\ B^k\ A^i\ B^j}{e_{(A)}\ e_{(B)}\ g_{hi}\ g_{kj}\ A^h\ A^i\ B^k\ B^j}$$

$$=\frac{(e_{(A)}\ e_{(B)}\ g_{hj}\,g_{jk}-g_{hk}\,g_{ij})\ \ A^h\ A^i\ B^j\ B^k}{e_{(A)}\ e_{(B)}\ g_{hi}\,g_{kj}\ A^h\ A^i\ B^k\ B^j.}$$

கணக்கு 8: A^{ij} ஓர் எதிர்ச்சீர் முரண்மாறிப் பண்புரு என்றால் $(\sqrt{g}\ A^{23}, \sqrt{g}\ A^{31}, \sqrt{g}\ A^{12})$ என்பது ஓர் உடன்மாறி வெக்டர் என நிரூபி.

A^{ij} ஓர் எதிர்ச்சீர் பண்புரு

எனவே $$A^{ij} = -A^{ji}$$

$\varepsilon_{kij}\ A^{ij}$ ஐ எடுத்துக்கொள்க.

$$\varepsilon_{kij}\ A^{ij} = \sqrt{g}\, e_{kij}\ A^{ij}$$

$$= \sqrt{g}\ [\,(e_{123}\ ^{2}A^{3} + e_{132}\ A^{32}),\ (e_{231}\ A^{31} + e_{213}\ A^{13}),\ (e_{312}\ A^{12} + e_{321}\ A^{21})\,]$$

மற்ற உறுப்புகள் பூச்சியம் ஆகின்றன.

$$= \sqrt{g}\ [\,(A^{23} - A^{32}), (A^{31} - A^{13}), (A^{12} - A^{21})\,]$$

$$= \sqrt{g}\ [2A^{23}, 2A^{31}, 2A^{12}]\ [\because A^{ij}\text{-எதிர்ச்சீருடையது}]$$

எனவே

$$\tfrac{1}{2}\ \varepsilon_{kij}\ A^{ij} = [\sqrt{g}\, A^{23}, \sqrt{g}\, A^{31}, \sqrt{g}\, A^{12}]$$

ஆனால் $\frac{1}{2}\ \varepsilon_{kij}\ A^{ij}$ என்பது ஓர் உடன்மாறி வெக்டர்.

எனவே $[\sqrt{g}\ A^{23}, \sqrt{g}\, A^{31}, \sqrt{g}\ A^{12}]$ என்பதும் ஓர் உடன் மாறி வெக்டர்.

பயிற்சி

1. $g_{mn}\, g^{mn}$ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

2. $g = |\, g_{mn}\,|$ என்றால் $\sqrt{g}$ ஒரு பண்புரு அடர்த்தி என நிரூபி.

3. ε_{ijk}, ε^{ijk} என்பன தனித்த பண்புருக்கள் எனக் காட்டுக.

4. $(ds)^2 = 3\ (dx^1)^2 - 4(dx^2)^2 + 5(dx^3)^2 - 2dx^1dx^2 + 6dx^2dx^3$ என்பது ஒரு வெளியின் அளவை உரு ஆனால் (i) g_{mn} (ii) g (iii) g^{mn} இவற்றைக் கண்டுபிடி.

5. ஒரு V_2 ல் $g_{11} = E$, $g_{12} = F$, $g_{22} = G$ எனில் $g = EG - F^2$, $g^{11} = \dfrac{G}{g}$, $g^{12} = -\dfrac{F}{g}$, $g^{22} = \dfrac{E}{g}$ என்று காட்டுக.

6. V_3 ல் (u, v, w) என்ற இலக்கெண்களில் அடிப்படையுரு $a\,(du)^2 + b\ \ (dv)^2 + c\ \ (dw)^2 + 2f dv dw + 2g dw du + 2h\ du\ dv$ ஆனுல் g^{ij} யைக் கண்டுபிடி.

7. ஒரு V_4 ன் அளவையுரு
$(ds)_2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + C^2\ (dx^4)^2$ ஆகும்.

இதில் $(1,0,0,0), \left(\sqrt{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{c}\right)$ என்பன அலகு வெக்டர்கள் என நிருபி. அவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணம் மெய்யானது அல்ல என்றும் நிருபி.

8. கீழ்க்காணும் துணைப்பண்புருக்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை எழுதுக.

(i) A_{ijk}, A^{lmn}

(ii) A^{ijk}, $A^{p\cdot q\cdot}_{\cdot r\cdot}$

(iii) $A^{\cdot p\cdot q}_{r\cdot s\cdot t}$, $A^{\cdot\cdot\cdot mn}_{ijk\cdot}$

9. $A_p^{\cdot\, qr} = B_p^{\cdot\, q}\, C^r$ என்ருல் $A^{pqr} = B^{pq} C^r$ என் நிருபி.

10. நிருபிக்க (a) $A_p^{\cdot\, q}\, B^p_{\cdot\, rs} = A^{pq}\, B_{prs}$

(b) $A^{pq}_{\cdot\cdot r}, B^{\cdot\, r}_p = A^{\cdot\, q}_{p\cdot r}\ B^{pr}$

11. $x^1 = a\cos t$. $x^2 = a\sin t$, $x^3 = bt$ என்பது முப்பரிமாண யூக்லிடின் வெளியில் ஒரு வளைவைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகள். (x^1, x^2, x^3) என்பன செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள். t என்பது ஒட்டளவை a, b, என்பன மாறிலிகள். $t=0$, $t=2\pi$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள வளைவின் நீளத்தைக் கண்டுபிடி.

அளவையுரு $(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ என்ருல் அதே வளைவிற்கு t ன் அதே மதிப்புகளுக்கிடையில் வளைவின் நீளம் என்ன? $a \gtrless b$ என்னும் மூன்று நிலைகளையும் ஆராய்க.

12. ஒரு முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பில் λ^r என்னும் அலகுவெக்டர் இலக்குவளைவு களோடு $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ என்னும் கோணங்களை ஏற்படுத்தினுல் $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$ என்பனவற்றைக் கண்டுபிடி.

13. இலக்கெண் அமைப்பு வளைகோட்டிய செங்கோண அமைப்பாக இருந்தால்

$$g = g_{11}\, g_{22}\, g_{33}$$ என நிறுவுக.

14. A_{ij} ஓர் எதிர்ச்சீர் உடன்மாறிப் பண்புருவானுல் $\left(\frac{A_{23}}{\sqrt{g}}, \frac{A_{31}}{\sqrt{g}}, \frac{A_{12}}{\sqrt{g}}\right)$ ஒரு முரண்மாறி வெக்டர் என்று காட்டு.

15. A^{ij} ஒரு சமச்சீர்ப் பண்புருவானுல் $\varepsilon_{kij}\ A^{ij} = 0$ அதாவது முதலாம் அடைவு இல்லா நிலைப்பண்புரு என நிரூபி.

16. $i \neq j$ எனில் $A_{ij} = 0$, என்ருல் அதன் இணையிய பண்புரு B^{ij}-ம் $i \neq j$ ஆக இருக்கும்போது பூச்சியம். மேலும் $B^{ii} = \frac{1}{A_{ii}}$ (கூட்டல் மரபு இல்லை) என நிரூபி.

7. பண்புரு நுண்கணிதம்
(Tensor Calculus)

57. கிறித்தஃபலின் குறியீடுகள் (Christoffel's Symbols)

இந் நூற்பகுதியில் அடிப்படைப் பண்புரு $g_{ij}(x^i)$ ன் பகுதி வகைக்கெழுக்களின் சில சேர்க்கைகளை அறிமுகப்படுத்துகிறோம். அவை பண்புரு நுண்கணிதத்தில் பெரிதும் பயன்படுபவை. கீழ்க் கண்ட சேர்க்கைகளைக் குறிக்க $[ij, k]$, $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ என்னும் இரு குறியீடுகளை பயன்படுத்துகிறோம்.

$$[i\,j,\,k]=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right] \qquad \ldots\ldots(57\cdot1)$$

$$(i,\,j,\,k=1,2,\ldots\ldots N)$$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}=g^{kl}\,[i\,j,\,l] \qquad \ldots\ldots(57\cdot2)$$

(l கூட்டல் மரபுக்குட்பட்டது)

$[i\,j,\,k]$, $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ என்பனவற்றை முறையே முதல், இரண்டாம் வகை கிறித்தஃபலின் குறியீடுகள் என்கிறோம். அடிப்படைப் பண்புருவின் கூறுகள் x^i ன் சார்புகள் ஆதலின் கிறித்தஃபலின் குறியீடுகளும் x^i ன் சார்புகளே.

இக்குறியீடுகள் பண்புருக்கள் அன்று என நாம் பின்னர் நிரூபிப்போம். அவை பண்புருக்கள் இல்லையாயினும் அவற்றில் உள்ள சுட்டிணைப்புகளைக் கூட்டல் மரபு ஏற்கத்தக்கவாறு அமைத்துள்ளோம்.

முதல் வகை குறியீட்டில் உள்ள மூன்று சுட்டிணைப்புகளும் கீழ்க்குறிகள் போன்று இயங்குவன. இரண்டாம் வகை குறியீட்டில் உள்ள மேலே உள்ள சுட்டிணைப்பு மேற்குறி போலவும், கீழே உள்ள சுட்டிணைப்புகள் கீழ்க்குறிகள் போன்றும் இயங்குவன.

குறிப்பு 1 : இரண்டாம் வகைக் குறியீடு $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ ன் இடத்தில் $\{i, j, k\}$, Γ^k_{ij} என்ற குறியீடுகளையும் பயன்படுத்தலாம். இவற்றில் Γ^k_{ij} என்னும் குறியீடு பண்புரு போன்று தோற்றமளிக்கிறது; எனினும் அது பண்புருவல்ல.

குறிப்பு 2 : ஒவ்வொரு தனித்த g_{ij}க்கும் ஒவ்வொரு வகை கிறித்தஃபல் குறியீடுகளின் எண்ணிக்கை $=N$.

தனித்த g_{ij}க்களின் எண்ணிக்கை $=\frac{1}{2} N(N+1)$

எனவே தனித்த கிறித்தஃபல் குறியீடுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை $\Big\}$ $= N \times \frac{1}{2} N (N+1)$

$$= \frac{1}{2} N^2 (N+1)$$

58. கிறித்தஃபல் குறியீடுகளின் இயல்புகள்

இனி, நாம் கிறித்தஃபல் குறியீடுகளின் இயல்புகள் பற்றி அறிவோம். இங்கு கொடுக்கப்படும் இயல்புகள் யாவும் பண்புரு நுண்கணிதத்தில் மிக்க பயனுள்ளவையாகும்.

இயல்பு 1 : $[i, j, k]$, $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ என்ற இருவகைக் குறியீடுகளும் i, j-க்களில் சமச்சீர் உடையவை.

அதாவது
$$[ij, k] = [ji, k] \qquad \text{......(58.1)}$$
$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \left\{ {k \atop ji} \right\} \qquad \text{......(58.2)}$$

நிருபணம் : மேற்கண்ட முடிவுகள் குறியீடுகளின் வரையறைகளினாலேயே பெறப்படுகின்றன.

இயல்பு 2 : $[ij, k] = g_{kl} \left\{ {i \atop ij} \right\}$

நிருபணம் : வரையறைப்படி
$$\left\{ {l \atop ij} \right\} = g^{lm} [ij, m]$$

இரு பக்கங்களிலும் g_{kl} ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$g_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} = g_{kl}\, g^{lm}\, [ij, m]$$

$$= \delta_k^m\, [ij, m]$$

$$= [ij, k]$$

எனவே $[ij, k] = g_{kl}\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$ ......(58.3)

குறிப்பு : $\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} = g^{lk}\, [ij, k]$

$$[ij, k] = g_{lk}\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$$

l ஐ மேற்குறியாகக் கொண்டால் மேற்கூறிய செயல்கள் இரண்டும், அடிப்படைப் பண்புருக்களால் பெருக்கும்போது பண் புருக்களில் குறிகளை 'ஏற்றம்' 'இறக்கம்' செய்வதற்கு ஒப்பானவை. எனவே இரண்டு வகை கிறித்தஃபலின் குறியீடுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை எளிதில் நினைவில் கொள்ளலாம்.

இயல்பு 3 : $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = [i\,k, j] + [j\,k, i]$ ......(58·4)

நிரூபணம் :

$$[i\,k, j] + j\,k, i] = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right]$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad [\because g_{ij} \text{ சமச்சீர் உடையது}]$$

குறிப்பு : மேலே நிரூபிக்கப்பட்ட முடிவை

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{lj}\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} + g_{li}\begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} \qquad ......(58.5)$$

என்றும் எழுதலாம்.

இயல்பு 4 : $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{ri}\begin{Bmatrix} j \\ rk \end{Bmatrix} - g^{rj}\begin{Bmatrix} i \\ rk \end{Bmatrix}$ ......(58·6)

நிருபணம் :

$g_{lm}\, g^{mn}=\delta^{n}_{l}$ என்பது தெரிந்ததே. இதை x^p ஐ பொருத்து வகையிட

$$g_{lm}\frac{\partial g^{mn}}{\partial x^p}+g^{mn}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^p}=0$$

(அதாவது) $$g_{lm}\frac{\partial g^{mn}}{\partial x^p}=-g^{mn}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^p}$$

$$=-g^{mn}\left([l\,p,\,m]+[m\,p,\,l]\right)\quad [58.9\text{ன்படி}]$$

இரு பக்கங்களையும் g^{lq} ஆல் பெருக்க

$$\delta^{q}_{m}\frac{\partial g^{mn}}{\partial x^p}=-g^{lq}\,g^{mn}\left([l\,p,\,m]+[m\,p,\,l]\right)$$

(அதாவது) $$\frac{\partial g^{qn}}{\partial x^p}=-g^{lq}\begin{Bmatrix} n \\ lp \end{Bmatrix}-g^{mn}\begin{Bmatrix} q \\ mp \end{Bmatrix}$$

q, n, p, l, m என்ற சுட்டிணைப்புகளை i, j, k, r, r ஆல் பிரதியிட

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{ri}\begin{Bmatrix} j \\ rk \end{Bmatrix}-g^{rj}\begin{Bmatrix} i \\ rk \end{Bmatrix}$$

இயல்பு 5 : $$\begin{Bmatrix} i \\ ik \end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial x^k}\log\sqrt{g}. \qquad \ldots\ldots(58.7)$$

நிருபணம் : அணிக்கோவையின் ஓர் இயல்பினால்

$$g=g_{ij}\,G(i,j)$$ (j மட்டும் கூட்டல் மரபுக்குக் கட்டுப்பட்டது.)

இங்கே $G(i,j)$ என்பது $|g_{ij}|$ ல் g_{ij} ன் இணைச்சினை ஆகும். $G(i,j)$ ல் g_{ij} வெளிப்படையாக இல்லை.

எனவே $$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=G(i,j). \qquad \ldots\ldots(58.8)$$

அடுத்து $$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \cdot \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$= G(i, j)\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \qquad \text{(58.8 ன்படி)}$$

$$= g g^{ij}\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \qquad \text{(58.4) பயன்படுத்த)}$$

$$= g g^{ij}\ (\ [ik, j] + [jk, i]\ )$$

$$= g\left(\left\{ \begin{matrix} i \\ ik \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} j \\ jk \end{matrix} \right\}\right)$$

$$= 2\,g \left\{ \begin{matrix} i \\ ik \end{matrix} \right\} \quad (i \text{ களில் கூட்ட})$$

எனவே $$\left\{ \begin{matrix} i \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g}\ \frac{\partial g}{\partial x^k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k} \log \sqrt{g}$$

எனவே $$\left\{ \begin{matrix} i \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^k} \log \sqrt{g}$$

குறிப்பு: மேலேகண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து $\left\{ \begin{matrix} i \\ ik \end{matrix} \right\}$ ஓர் உடன்மாறி வெக்டர் என்ற முடிவிற்கு வரக்கூடாது. ஏனெனில் g ஒரு மாற்றமிலி அன்று.

g குறைச் சார்பாக இருந்தால்

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^k} \log \sqrt{-g}$$ என எழுதுகிறோம்.

59. கிறித்தஃபல் குறியீடுகளின் மாற்றுரு விதிகள்

அடிப்படைப் பண்புரு g_{ij} உடன்மாறிப் பண்புருவாவதால்

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\ g_{pq}$$

இந்தச் சமன்பாட்டை $\bar{x}^k$-ஐ பொருத்து வகையிட

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\ \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\ g_{pq}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\ \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\ g_{pq} \qquad \text{......(59.1)}$$

i, j, k க்களையும் p, q, r களையும் வட்டவரிசையில் மாற்றி எழுத

$$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} g_{qr}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} g_{qr} \qquad \ldots\ldots(59.2)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} g_{rp}$$

$$+ \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} g_{pr} \qquad \ldots\ldots(59.3)$$

$\dfrac{(59.2)+(59.3)-(59.1)}{2}$ ஐ எழுத

$$\overline{[i, j, k]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} [pq, r] +$$

$$\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \cdot \underset{(1)}{\underset{\downarrow}{\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} g_{qr}}} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \cdot \underset{(2)}{\underset{\downarrow}{\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} g_{qr}}}$$

$$+ \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \underset{(3)}{\underset{\downarrow}{g_{rp}}} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \underset{(4)}{\underset{\downarrow}{g_{rp}}}$$

$$- \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \underset{(5)}{\underset{\downarrow}{\frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j}}} g_{pq} - \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^i} \underset{(6)}{\underset{\downarrow}{\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}}} g_{pq} \Bigg] \ldots\ldots(59.4)$$

(4) — (5) எடுத்துக் கொண்டால்

$$= \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} g_{rp} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} g_{pq}$$

போலி சுட்டிணைப்பு r க்குப் பதிலாக q வை இட

$$= \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} g_{qp} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^j} g_{pq} = 0.$$

இதைப்போலவே $(1)-(6)=0$

அடுத்து $(2)+(3)=\dfrac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\cdot\dfrac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\,g^{qr}+$

$$\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\cdot\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^i}\,g_{rp}.$$

போலிச் சுட்டிணைப்புகளை மாற்ற

$$(2)+(3)=\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\,g_{pq}+\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^i}\,g_{qp}$$

$$=2\,\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\,g_{pq}$$

இம் முடிவுகளை 59.4 ல் பிரதியிட

$$\overline{[ij,k]}=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\cdot\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial \bar{x}^k}\,[pq,r]$$

$$+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^k}\,g_{pq} \qquad \ldots\ldots(59{\cdot}5)$$

இதுவே கிறித்தஃபல் குறியீடு $[pq,r]$ ன் மாற்றுரு விதியாகும். $\overline{[i\,j,k]}$ ன் மேலுள்ள கோடு அந்தக் குறியீடு $\bar{x}^i$ அமைப்பில் $\bar{g}_{ij}$ யைப் பொருத்துக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது என்பதைக் குறிக்கின்றது.

அடுத்து இரண்டாம் வகை கிறித்தஃபல் குறியீட்டின் மாற்றுரு விதியைக் கண்டுபிடிப்போம்.

இப்போது, $$\bar{g}^{lk}=\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\cdot\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t}\,g^{st} \qquad \ldots\ldots(59{\cdot}6)$$

என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம். [59·5 என்ற சமன்பாட்டை அகப்பெருக்கல் செய்ய வேண்டியே, இடதுபக்கத்தில் ஒரு சுட்டிணைப்பை K எனக் கொள்கிறோம்].

59·5 ஐ 59·6 ஆல் இரு பக்கங்களிலும் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$\bar{g}^{lk}\,\overline{[ij,k]} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\cdot\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t}\, g^{st}\,[pq,r]$$

$$+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^t}\, g^{st}\, g_{pq}$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\,\delta^r_t\, g^{st}\,[pq,r]$$

$$+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\,\delta^q_t\, g^{st}\, g_{pq}.$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\cdot\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\cdot\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\, g^{sr}\,[pq,r]$$

$$+\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\, g^{sq}\, g_{pq}$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\,\delta^s_p$$

$$\therefore\ \overline{\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^p} \quad (59.7)$$

இதுவே இரண்டாம் வகைக் குறியீட்டின் மாற்றுரு விதியாம்.

இதை

$$\bar{\Gamma}^l_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s}\,\Gamma^s_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^p}$$

என்று எழுதலாம்.

குறிப்பு: கிறித்தஃபல் குறியீடுகளின் மாற்றுருவிதிகளில் இருந்து அவை பண்புருக்கள் அல்ல என்பது தெளிவு. $\bar{x}^i = a^i_m x^m + b^i$ என்ற நேர்கோட்டிய இலக்கெண் நிலைமாற்றங்களுக்கு $\dfrac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^j} = 0$. எனவே அத்தகைய மாற்றங்களுக்கு கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பண்புருக்கள்போல் மாறுகின்றன.

முடிவு : $$\frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l} \overline{\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \left\{ \begin{matrix} t \\ pq \end{matrix} \right\}$$

நிருபணம் : இரண்டாம் வகைக் குறியீட்டின் மாற்றுரு விதியால்

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^s} \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^p}$$

இரு பக்கங்களையும் $\dfrac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l}$ ஆல் பெருக்க

$$\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^l} \overline{\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \delta^t_s \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^j} \delta^t_p$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \left\{ \begin{matrix} t \\ pq \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^j}$$

உறுப்புகளைப் பக்கம் மாற்றி எழுத

$$\frac{\partial^2 x^t}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l} \overline{\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^j} \left\{ \begin{matrix} t \\ pq \end{matrix} \right\} \qquad \ldots\ldots(59.8)$$

இது ஒரு பயன் மிக்க தொடர்பு ஆகும்.

குறிப்பு : $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots\ldots + (dx^N)^2$ அளவையுரு உள்ள ஒரு யூக்லிடின் வெளியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இதற்கு $\Gamma^i_{jk}(x) = 0.$

எனவே $\bar{x}^i$ அமைப்பில் 59·7

$$\overline{\Gamma}^i_{jk}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j\, \partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \text{ என்றாகிறது.}$$

புது இலக்கெண் அமைப்பும் ஒரு தெக்காட்டின் அமைப்பானால், அதாவது g_{ij} க்கள் மாறிலிகளானால் $\Gamma^i_{jk} = 0$

எனவே $$\frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = 0$$

(அதாவது) $$x^p = a^p_i\, \bar{x}i + b^p \qquad \ldots\ldots(59.9)$$

இங்கே a^p_i, b^p என்பன தொகையின் மாறிலிகள். எனவே இரு தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்புகளுக்கிடையே உள்ள இலக்கெண் நிலைமாற்றம் நேர் கோட்டியது ஆகும்.

மேலும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் மாறிலியாக இருக்க வேண்டுமென்று நாம் விரும்பினுல்

$$dx^p \cdot dx^p = d\bar{x}^i \, d\bar{x}^i$$

$$= a^p_i \, dx^i \, a^p_j \, dx^j$$

எனவே $$a^p_i \, a^p_j = \delta^i_j \qquad \ldots\ldots(59.10)$$

59.9, 59.10 இவற்றிற்கு கட்டுப்பட்ட இலக்கெண் நிலைமாற்றத்திற்கு முரண்மாறி, உடன்மாறி வேற்றுமை கிடையாது என்று முன்னரே படித்துள்ளோம்.

எனவே ஒரு செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பிலிருந்து மற்றொரு செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பிற்கு மாறும்போது அவ்வமைப்புகளில் உள்ள பண்புருக்களுக்கு முரண்மாறி, உடன் மாறி வேறுபாடுகள் இல்லை. அத்தகைய பணபுருக்களைத் தெக்காட்டின் பண்புருக்கள் (cartesian tensors) என்கிறோம். இவ்வமைப்புகளில் ஒரு தெக்காட்டின் பண்புருவின் உடன்மாறிக் கூறுகள். Γ முரண்மாறிக் கூறுகள் இயற்பியல் கூறுகள் இவை ஒன்றுக்கொன்று சமம் (நூற்பிரிவு 48, குறிப்பு 2).

60. மாதிரிகணக்குகள்

கணக்கு 1 : $i \neq j$ ஆக இருக்கும்போது $g_{ij}=0$ ஆக உள்ள வெளிகளுக்கு (i) முதல் வகை (ii) இரண்டாம் வகை கிறித்தஃபல் குறியீடுகளைக் கண்டுபிடி.

இந்தக் கணக்கின் விடையில் கூட்டல் மரபு பயன்படுத்தப்படவில்லை.

$g_{ij}=0$ $[i \neq j$ ஆனுல்$]$ எனவே அமைப்பு செங்கோண இலக்கெண் அமைப்பு ஆகும்.

(i) $i=j=k$ ஆனுல் $[ij, k]=[i\,i, i]$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}\right]$$

$$[i\,i, i] = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \qquad \ldots\ldots(60.1)$$

(ii) $i=j\neq k$ ஆனல் $[i\,j, k]+[i\,i, k]$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\right]$$

$i\neq k$ எனவே $g_{ik}=0$

$$\therefore\quad [i\,i, k]=-\tfrac{1}{2}\ \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \qquad \text{......(60.2)}$$

(iii) $i=k\neq j$ ஆயின் $[i\,j, k]=[i\,j, i]$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}\right]$$

$$\therefore\ [i\,j, i]=\tfrac{1}{2}\ \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \qquad \text{......(60.3)}$$

(iv) $i\neq j\neq k$ ஆனல் அதாவது i, j, k என்பன தனித்தனி மதிப்புடையவை ஆனல் $g_{ij}=g_{jk}=g_{ki}=0$

எனவே $[i\,j, k]=0$ ......(60.4)

அடுத்து இரண்டாம் வகைக்குறியீடுகளேக் கண்டுபிடிப்போம். செங்கோண இலக்கெண் அமைப்பில்

$$g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}} \quad \text{(கூட்டல் மரபு இல்லே)}$$

எனவே $l\neq k$ எனின் $\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}=g^{lk}\,[ij, k]=0$

$l=k$ எனின் $\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}=g^{ll}\,[ij, l]=\dfrac{[ij, l]}{g_{ll}}$

(i) $i=j=l$ எனின்

$$\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} i \\ ii \end{Bmatrix}=\frac{[ii, i]}{g_{ii}}=\frac{1}{2g_{ii}}\ \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$$

$$\therefore\ \begin{Bmatrix} i \\ ii \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x^i}\log g_{ii} \qquad \text{......(60.5)}$$

(ii) $i=j\neq l$ எனின்

$$\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} l \\ ii \end{Bmatrix}=\frac{[ii, l]}{g_{ll}}=-\frac{1}{2g_{ll}}\ \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^l} \qquad \text{......(60.6)}$$

(iii) $i=l\neq j$ எனின்

$$\left\{\begin{matrix} l \\ ij \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} i \\ ij \end{matrix}\right\} = \frac{[ij, i]}{g_{ii}} = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \qquad \text{......(60 7)}$$

$$\therefore \left\{\begin{matrix} i \\ ij \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \log g_{ii}.$$

(iv) $i\neq j\neq l$ எனின் $\left\{\begin{matrix} l \\ ij \end{matrix}\right\} = 0.$

கணக்கு 2: (i) செவ்வக (ii) கோளத்துருவ இலக்கெண் அமைப்புகளுக்கு இரண்டாம் வகைக் கிறித்தஃபல் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுக.

இவ்விருவகை அமைப்புகளும் செங்கோண அமைப்புகள். எனவே கணக்கு 1-ல் நிரூபித்த முடிவுகளைப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

இவ்விடையிலும் கூட்டல் மரபு பயன்படுத்தப்படவில்லை

(i) செவ்வக இலக்கெண் அமைப்பில்

$g_{ii}=1$, $i\neq j$ எனின் $g_{ij}=0.$

எனவே $\left\{\begin{matrix} l \\ ij \end{matrix}\right\} = 0$

(ii) அடுத்துக் கோளத்துருவ அமைப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$x^1=r$ $x^2=\theta$, $x^3=\phi$ என்க.

அளவை உரு

$$(ds)^2=(dx^1)^2+(x^1)^2(dx^2)^2+(x^1)^2 (\sin x^2)^2 (dx^3)^2$$

$$g_{11}=1,\ g_{22}=(x^1)^2,\ g_{33}=(x^1)^2 (\sin x^2)^2$$

$g_{11}=1$ எனவே $i=2$ அல்லது 3 ஆக இருக்கும் போதுதான் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியம் ஆகா. எனவே பூச்சியமாகாத குறியீடுகள், கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} (x^1)^2 = -x^1$$

$$\left\{\begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -x^1 \sin^2 x^2$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \right\} = 0 \quad [\because 1 \neq 2 \neq 3]$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2(x)^2} \frac{\partial}{\partial x^1} (x^1)^2 = \frac{1}{x^1}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2(x^1)^2} \frac{\partial}{\partial x^2} (x^1 \sin^2 x^2)^2$$

$$= -\sin x^2 \cos x^2$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{x^1}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \cot x^2.$$

61. வெக்டர்களின் உடன்மாறி வகையிடல் (Covariant Differentiation of Vectors)

பண்புரு நுண்கணிதத்தில் வெளியின் ஒரு பகுதியில் வரையறை செய்யப்பட்ட பண்புருக்களத்தையே நுண்கணித செயல்களுக்கு உட்படுத்துகிறோம். ஆனால் அந்த பண்புருக்களத்தைப் பண்புரு என்றே குறிப்பிடுவோம். இதனால் எவ்வித கருத்துக் குழப்பமும் நேராது.

ϕ என்ற அளவியின் அதாவது பூச்சியத் தகுநிலைப் பண்புருவின் பகுதி வகைக்கெழு $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ ஓர் உடன்மாறி வெக்டர் என்பது நமக்குத் தெரியும். ஆனால் முதல் அல்லது மேல்தகுநிலைப் பண்புருக்களின் பகுதி வகைக்கெழுக்கள், பொதுவாகப் பண்புருத் தன்மை பெற்றிருப்பதில்லை. எனவே பண்புருக்களின் பகுதி வகைக்கெழுக்களில் பொருத்தமான உருவமாற்றம் செய்து பண்புருத் தன்மையை ஊட்ட முயற்சிப்போம்.

x^i அமைப்பில் A_i என்னும் உடன்மாறி வெக்டரை எடுத்துக் கொள்வோம். $\bar{A}_j$ என்பன $\bar{x}^j$ அமைப்பில் வெக்டரின் கூறுகளாக இருக்கட்டும்.

எனவே

$$\bar{A}_j = A_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \qquad \text{......(61.1)}$$

$\bar{x}^l$ ஐ பொருத்து வகையிட

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} + A_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}} \qquad \text{......(61.2)}$$

(61.2) ல் வலது பக்கமுள்ள இரண்டாவது உறுப்பினுல் $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ என்பது பண்புருவல்ல எனத் தெளிவாகிறது. எனவே இந்தச் சமன்பாட்டை சற்றே மாற்றிப் பண்புருத் தன்மையை ஊட்டு வதற்காக, அதில் உள்ள இரண்டாம் அடைவு பகுதிக்கெழுவை (59.8) ஐ பயன்படுத்தி நீக்குகிறேம்.

59.8 ன் படி

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^l} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jl \end{Bmatrix}} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l}\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots(61.3)$$

61.2-ல் பிரதியிட

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} + A_i\left[\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jl \end{Bmatrix}} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l}\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix}\right]$$

$$= \quad ,, \quad + \bar{A}_n\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jl \end{Bmatrix}} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l}\,A_i\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix}$$

எனவே

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial \bar{x}^l} - \bar{A}_n\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jl \end{Bmatrix}} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l}\,A_i\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix}$$

வலது பக்கத்திலுள்ள முதல் உறுப்பில் i, k என்ற போலி சுட்டிணைப்புகளை p, q, ஆல் பிரதியிட

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^l} - \bar{A}^n\overline{\begin{Bmatrix} n \\ jl \end{Bmatrix}} = \left[\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - A_i\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l} \ldots\ldots(61.4)$$

எனவே $\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - A_i\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix}$ ஓர் இரண்டாம் அடைவு உடன் மாறிப் பண்புருவாகும். இதை x^q ஐப் பொருத்து A_p ன் உடன் மாறி வகைக்கெழு (Covariant derivative) என்கிறேம். இந்த வகைக் கெழுவை $A_{p,q}$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கிறேம். காற்புள்ளி உடன்மாறி வகையிடலைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எனவே $$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^p} - A_i\begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots(61.5)$$

வரையறை : x^i அமைப்பில் g_{ij} கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனின், $\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - A_i \left\{ \begin{matrix} i \\ pq \end{matrix} \right\}$ என்ற N^2 சார்புகளின் தொகுதி x^q வைப் பொருத்து A_pன் உடன்மாறி வகைக்கெழுவை வரையறை செய்கிறது.

குறிப்பு : உடன்மாறி வகைக்கெழுவைக் கண்டுபிடிக்க, கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் தேவை. எனவே அடிப்படைப் பண்புரு g_{ij} முதலிலேயே கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

இதைப்போன்றே முரண்மாறி வெக்டரின் உடன்மாறி வகைக் கெழுவையும் வரையறை செய்யலாம்.

இதற்கு $\bar{A}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} A^i$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். $\bar{x}^k$ ஐப் பொருத்து வகையிட

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial A^i}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \, \partial x^l} \; \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \; A^i \qquad (61.6)$$

59.8 ல் அதாவது இரண்டாம் வகைக் கிறித்தஃபல் குறியீட்டின் மாற்றுரு விதியில் x, $\bar{x}$ இலக்கெண்களை பரிமாற்றம் செய்ய

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i \, \partial x^l} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} n \\ il \end{matrix} \right\} - \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} j \\ pq \end{matrix} \right\} \qquad \ldots\ldots(61.7)$$

61.6 ல் பிரதியிட

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \; \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \; \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \left\{ \begin{matrix} n \\ il \end{matrix} \right\} A^i$$

$$- \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^l} \; \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \left\{ \begin{matrix} j \\ pq \end{matrix} \right\} A^i$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \; \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \; \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \; \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \left\{ \begin{matrix} n \\ il \end{matrix} \right\} A^i$$

$$- \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \; \delta^q_k \left\{ \begin{matrix} j \\ pq \end{matrix} \right\} A^i$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \; \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \; \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \; \frac{\partial x^l}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} n \\ il \end{matrix} \right\} A^i$$

$$- \left\{ \begin{matrix} j \\ pk \end{matrix} \right\} \bar{A}^p$$

எனவே

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial \bar{x}^k} + \begin{Bmatrix} j \\ pk \end{Bmatrix} \bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial A^n}{\partial x^l} + \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} \begin{Bmatrix} n \\ il \end{Bmatrix} A^i$$

(i என்னும் போலிச் சுட்டிணைப்பை n ஆக மாற்ற

$$\therefore \frac{\partial A^j}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} j \\ pk \end{Bmatrix} A^p = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} \left[\frac{\partial A^n}{\partial x^l} + \begin{Bmatrix} n \\ il \end{Bmatrix} A^i \right] \qquad (61.8)$$

எனவே $\frac{\partial A^n}{\partial x^l} + \begin{Bmatrix} n \\ il \end{Bmatrix} A^i$ என்பது ஓர் இரண்டாம் தகுநிலைக் கலப்புப் பண்புரு. இதை x^l ஐப் பொருத்து A^i ன் உடன்மாறி வகைக்கெழு என்கிறோம். இதை $A^i_{,l}$ என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிக்கிறோம். எனவே $A^i_{\ ,\ l} = \frac{\partial A^n}{\partial x^l} + \begin{Bmatrix} n \\ il \end{Bmatrix} A^i$ (61.9)

வரையறை : x^i அமைப்பில் g_{ij} கொடுக்கப்பட்டது எனின் $\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} A^k$ எனும் N^2 சார்புகளின் தொகுதி x^j ஐப் பொருத்து A^k ன் உடன்மாறி வகைக்கெழுவென வரையறை செய்கிறோம்.

குறிப்பு 1 : செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கெண்களின் அமைப்பு முறையைக் கொண்ட ஒரு யூக்லிடின் வெளியில், இரண்டாம் வகைக் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன. எனவே உடன்மாறி வகைக்கெழு நமக்கு பழக்கமான பகுதிவகைக் கெழுவாகச் சுருங்குகிறது. யூக்லிடின் வெளியிலேயே மற்ற எல்லா இலக்கெண் அமைப்புகளிலும் கிறித்தஃபல் குறியீடு கள் பூச்சியமாவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு : கோளத்துருவ இலக்கெண் அமைப்பு.

குறிப்பு 2 : I என்னும் மாற்றமிலியின் பகுதி வகைக்கெழுக் கள் ஓர் உடன்மாறி வெக்டரின் கூறுகள் என்பது தெரிந்ததே. எனவே உடன்மாறி வகையிடலின் வரையறையை சற்றே நீட்டி, $\frac{\partial I}{\partial x^i}$ என்னும் பகுதி வகைக்கெழுவை I-ன் உடன்மாறி வகைக் கெழு என்கிறோம்.

அதாவது $$I_{,\,i} \equiv \frac{\partial I}{\partial x^i} \qquad \ldots\ldots(61.10)$$

என வரையறை செய்கிறோம்.

$I,_i$ ஓர் உடன்மாறி வெக்டர் ஆதலால் அதை x^j ஐப் பொருத்து உடன்மாறி வகையிடலாம்.

அதாவது $$(I,_i),_j = \frac{\partial^2 I}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial I}{\partial x^r} \quad \text{......(61.11)}$$

மேலும், $(I,_i),_j = (I,_j),_i$ என்பது தெளிவு. அதாவது $I,_i$ ன் உடன்மாறி வகைக்கெழு இயற்கணித மாற்றுவிதிக்குக் கட்டுப் பட்டது.

ஆயினும், பொதுவாக உடன்மாறி வகைக் கெழு மாற்று விதிக்குக் கட்டுப்பட்டது அல்ல.

62. பண்புருக்களின் உடன்மாறி வகையிடல்

நூற்பகுதி 61 ல் வெக்டர்களின் பகுதி வகைக்கெழுக்களை உள்ளடக்கிய பண்புருக்களைத் தோற்றுவித்து அவற்றிற்கு உடன் மாறி வகைக்கெழுக்கள் எனப் பெயரிட்டோம். இந்த முறையில் உடன்மாறி வகையிடலை பண்புருக்களுக்கு நீட்ட முயற்சிப்போம். இதற்கு A^i_j என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட பண்புருவை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் ஒரு முரண்மாறிச் சுட்டிணைப்பும், ஓர் உடன்மாறிச் சுட்டிணைப்பும் உள்ளதால் பண்புரு உடன்மாறி வகையிடலின் பொதுத்தன்மையை இது உடன்மாறி வகையிடுவதால் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

மாற்றுரு விதியின்படி,

$$\bar{A}^p_q = A^i_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \cdot \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i}$$

$\dfrac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}$ ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$\bar{A}^p_q \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} = A^i_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \delta^m_i$$

அதாவது $$\bar{A}^p_q \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} = A^m_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \quad \text{......(62.1)}$$

$\bar{x}^k$-ஐப் பொருத்து வகையிட

$$\frac{\partial \bar{A}^p_q}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} + \bar{A}^p_q \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^p} = \frac{\partial A^m_j}{\partial x^r} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} + A^m_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^q}$$

59.8-ஐ பயன்படுத்தி இரண்டாம் அடைவு பகுதி வகைக்கெழுக்களை நீக்க.

$$\frac{\partial \bar{A}^p_q}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}+\bar{A}^p_q\left[\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}\overline{\begin{Bmatrix} n \\ kp \end{Bmatrix}}-\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^p}\begin{Bmatrix} m \\ st \end{Bmatrix}\right]$$

$$=\frac{\partial A^m_j}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}+A^m_j\left[\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^u}\overline{\begin{Bmatrix} u \\ kq \end{Bmatrix}}-\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^w}{\partial \bar{x}^q}\begin{Bmatrix} j \\ vw \end{Bmatrix}\right]$$

62.1-ஐ பயன்படுத்த

$$\frac{\partial \bar{A}^p_q}{\partial \bar{x}^k}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}+\bar{A}^p_q\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}\overline{\begin{Bmatrix} n \\ kp \end{Bmatrix}}-A^t_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} m \\ st \end{Bmatrix}$$

$$=\frac{\partial A^m_j}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}+\bar{A}^p_u\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\overline{\begin{Bmatrix} u \\ kq \end{Bmatrix}}-A^m_j\frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^w}{\partial \bar{x}^q}\begin{Bmatrix} j \\ vw \end{Bmatrix}$$

போலிச் சுட்டிணைப்புகளைமாற்ற

$$\frac{\partial \bar{A}^p_q}{\partial \bar{x}^k}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}+\bar{A}^n_q\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\overline{\begin{Bmatrix} p \\ kn \end{Bmatrix}}-A^t_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix}$$

$$=\frac{\partial A^m_j}{\partial x^r}\cdot\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}+\bar{A}^p_u\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}\overline{\begin{Bmatrix} u \\ kq \end{Bmatrix}}-A^m_l\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\begin{Bmatrix} l \\ rj \end{Bmatrix}$$

உறுப்புகளைப் பக்கம் மாற்றி எழுத

$$\left[\frac{\partial \bar{A}^p_q}{\partial \bar{x}^k}+\bar{A}^n_q\overline{\begin{Bmatrix} p \\ kn \end{Bmatrix}}-\bar{A}^p_u\overline{\begin{Bmatrix} u \\ kq \end{Bmatrix}}\right]\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p}$$

$$=\left[\frac{\partial A^m_j}{\partial x^r}+A^t_j\begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix}-A^m_l\begin{Bmatrix} l \\ rj \end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \qquad \text{......(62.2)}$$

இனி $A^m_{j,r}\equiv\dfrac{\partial A^m_j}{\partial x^r}+\begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix}A^t_j-\begin{Bmatrix} l \\ rj \end{Bmatrix}A^m_l$

$\bar{A}^p_{q,k}\equiv\dfrac{\partial \bar{A}^p_q}{\partial \bar{x}^k}+\overline{\begin{Bmatrix} p \\ kn \end{Bmatrix}}\bar{A}^n_q-\begin{Bmatrix} u \\ qk \end{Bmatrix}\bar{A}^p_u$ என்க.

62.2 ல் பிரதியிட

$$\bar{A}^{p}_{q,k}\ \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} = A^{m}_{j,r}\ \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\ \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}$$

$\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^m}$ ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$\bar{A}^{l}_{q,k} = A^{m}_{j,r}\ \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q}\ .$$

எனவே $A^{m}_{j,r}$ என்பது ஒரு மூன்றும் அடைவுப் பண்புரு. அதன் தன்மை சுட்டிணைப்புகளால் காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்தப் பண்புரு $A^{m}_{j,r}$ ஐ, x^r ஐப் பொருத்து A^{m}_{j} ன் உடன்மாறி வகைக் கெழு என்கிறோம்.

எனவே x^k-ஐப் பொருத்து A^{i}_{j} ன் உடன்மாறி வகைக்கெழு

$$A^{i}_{j,k} = \frac{\partial A^{i}_{j}}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} A^{l}_{j} - \begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} A^{i}_{m} \qquad (62.3)$$

குறிப்பு: உடன்மாறி வகைக்கெழுச் சூத்திரங்கள் பண்புரு நுண் கணிதத்திற்கு அடிப்படையானவை. எனவே உடன்மாறி வகையிடலின் விதியை உயர் அடைவுப் பண்புருக்களுக்கு நீட்ட விதி 62.3, எவ்வாறு உருவாக்கப்பட்டுள்ளது என்பதைக் கூர்ந்து நோக்கவேண்டும். 62.3 ஐக் கவனித்தால் A^{i}_{j} ன் உடன் மாறி வகைக்கெழுவில் மூன்று உறுப்புகள் உள்ளன என அறிகிறோம்.

அவை (i) பண்புருவின் பகுதி வகைக்கெழு

(ii) முரண்மாறிச் சுட்டிணைப்புக்குச் சரியாக ஒரு மிகை உறுப்பு. இந்த உறுப்பு உருவாகும் விதி முரண்மாறி வெக்டரின் உடன்மாறி வகைக்கெழுவின் விதி போன்றது. அதாவது இந்த முரண்மாறிப் பிற்குறியை மூலப்பண்புருவில் இருந்து நீக்கி, அந்த உறுப்பில் வரும் கிறித்தஃபல் குறியீட்டின் மேல் பகுதியில் அமைக் கிறோம். மூலப்பண்புருவின் அந்தக் காலியிடத்தில் ஒரு போலிச் சுட்டிணைப்பை இட்டு நிரப்பி, அதே போலிச் சுட்டிணைப்பை

கிறித்தஃபல் குறியீட்டின் கீழ்ப்பகுதியில் அமைக்கிறேம். குறியீட்டில் உள்ள காலி இடத்தை எந்த x-ஐப் பொருத்து வகையிடுகிறேமோ அதன் பிற்குறியால் நிரப்புகிறேம்.

(iii) உடன்மாறிச் சுட்டிணைப்புக்குச் சரியாக ஒரு குறை உறுப்பு. இந்த உறுப்பு உருவாகும் விதி உடன்மாறி வெக்டரின் உடன்மாறி வகைக்கெழுவின் விதி போன்றது. இந்த உறுப்பினை உருவாக்கும் முறை (ii) ல் விளக்கப்பட்டது போன்றதே அதாவது இந்தப் பிற்குறியை பண்புருவில் இருந்து நீக்கி கிறித்தஃபல் குறியீட்டில் அதே மட்டத்தில் அமைக்க வேண்டும். பண்புருவின் காலியிடத்தை போலிச்சுட்டிணைப்பால் நிரப்பி, அதே போலிச் சுட்டிணைப்பை குறியீட்டின் மேல் பகுதியில் அமைக்கவும். மற்றவை முன் போலவே.

இனி உடன்மாறி வகையிடலின் விதியை உயர் அடைவுக் கலப்புப் பண்புருவிற்கு நீட்டலாம். ஓர் உயர் அடைவுக் கலப்புப் பண்புருவின் உடன்மாறி வகைக்கெழுவில், முதல் உறுப்பு அந்தப் பண்புருவின் பகுதிவகைக் கெழுவாகும். ஒவ்வொரு முரண்மாறி சுட்டிணைப்பிற்குச் சரியாக ஒருமிகை உறுப்பும், ஒவ்வொரு உடன்மாறிச் சுட்டிணைப்பிற்குச் சரியாக ஒரு குறை உறுப்பும் ஆக மற்ற உறுப்புக்கள் அமைந்திருக்கும்.

எனவே $$A^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_m}_{j_1 j_2 j_3 \ldots j_n, k} \equiv \frac{\partial A^{i_1 i_2 \ldots i_m}_{j_1 j_2 \ldots j_n}}{\partial x^k}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{m} \begin{Bmatrix} i_\alpha \\ p, k \end{Bmatrix} A^{i_1 i_2 \ldots i_{\alpha-1}\, p\, i_{\alpha+1} \ldots i_m}_{j_1 j_2 \ldots \ldots j_n}$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{n} \begin{Bmatrix} l \\ j_\beta, k \end{Bmatrix} A^{i_1 i_2 \ldots \ldots i_m}_{j_1 j_2 j_3 \ldots j_{\beta-1}\, l\, j_{\beta+1} \ldots j_n}. \qquad \ldots\ldots(62.4)$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) A_{ij} (ii) A^{ij} (iii) A^{ij}_{lmn} இவற்றை x^p ஐப் பொருத்து உடன்மாறி வகையிடவும்.

(i) $$A_{ij,\, p} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_p} - \begin{Bmatrix} l \\ ip \end{Bmatrix} A_{lj} - \begin{Bmatrix} l \\ jp \end{Bmatrix} A_{il}$$

(ii) $$A^{ij}_{,\, p} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^p} + \begin{Bmatrix} i \\ lp \end{Bmatrix} A^{lj} + \begin{Bmatrix} j \\ lp \end{Bmatrix} A^{il}$$

$$\text{(iii)}\quad A^{ij}_{lmn,\,p} = \frac{\partial A^{ij}_{lmn}}{\partial x^p} + \begin{Bmatrix} i \\ qp \end{Bmatrix} A^{qj}_{lmn} + \begin{Bmatrix} j \\ qp \end{Bmatrix} A^{iq}_{lmn}$$

$$- \begin{Bmatrix} r \\ lp \end{Bmatrix} A^{ij}_{rmn} - \begin{Bmatrix} r \\ mp \end{Bmatrix} A^{ij}_{lrn} - \begin{Bmatrix} r \\ np \end{Bmatrix} A^{ij}_{lmr}$$

குறிப்பு: உடன்மாறி வகைக்கெழுவிற்கும், பகுதி வகைக் கெழுவிற்கும் உள்ள ஒரு முக்கியமான வேறுபாட்டை நாம் நன்கு கவனிக்க வேண்டும். A_{ij} என்னும் பண்புருவை எடுத்துக்கொள் வோம். $\frac{\partial A_{12}}{\partial x^p}$, $A_{12,\,p}$ இவற்றிற்குள்ள வேறுபாட்டைக் கவனிப் போம். A_{12} என்ற ஒரு கூற்றின் மதிப்பு மட்டும் தெரிந்தால், அது இலக்கெண்களின் சார்பு ஆதலால் $\frac{\partial A_{12}}{\partial x^p}$ யை, அதாவது பகுதி வகைக்கெழுவைக் கண்டுபிடிக்கலாம். ஆனால் பண்புருவின் எல்லாக் கூறுகளுமே தெரிந்தாலன்றி A_{12} ஐ மட்டும் கொண்டு $A_{12,\,p}$ ஐ கணக்கிடமுடியாது. எனவே பகுதி வகையிடல் என்னும் செயல் ஒரு தனி உருப்படியின் மேல் 'செயல்படுவது; உடன்மாறி வகையிடல் ஒரு முழுத்தொகுதி உருப்படிகளின்மேல் செயல் படுவது.

63. ரிசியின் தேற்றம் (Ricci's Theorem)

தேற்றம்: அடிப்படைப் பண்புருக்கள் ஒவ்வொன்றின் உடன் மாறி வகைக்கெழுவும் பூச்சியமாகும். அதாவது $g_{ij,\,k}=0$, $g^{ij}_{\ ,\,k}=0$

நிருபணம்:

$$\text{(i)}\quad g_{ij,\,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} g_{lj} - \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} g_{il}$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - [i\,k, j] - [j\,k, i]$$

$$=0 \quad \text{(58.4 ன் படி)}$$

மீண்டும்

$$\text{(ii)}\quad g^{ij}_{\ ,\,k} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} g^{lj} + \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix} g^{il}$$

$$=0 \quad \text{(58.6 ன்படி)}$$

எனவே தேற்றம் நிருபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம்: கிரோனகர் டெல்டாவின் உடன்மாறி வகைக்கெழு பூச்சியமாகும்.

நிருபணம்:
$$\delta^{i}_{j,k} = \frac{\partial \delta^{i}_{j}}{\partial x^{k}} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} \delta^{l}_{j} - \begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} \delta^{i}_{m}$$
$$= 0 + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$$
$$= 0.$$

குறிப்பு: மேலே கண்ட தேற்றங்களிருந்து, உடன்மாறி வகையிடும்போது g_{ij}, g^{ij}, δ^{i}_{j} என்பன மாறிலிகள் போன்று இயங்குகின்றன என்று அறிகிறோம். அதாவது இவற்றை உடன் மாறி வகைக்கெழுவில் வெளியே எடுத்து எழுதலாம். எனவே உடன்மாறி வகையிடல், சுட்டிணைப்புகளின் ஏற்ற இறக்கம் என்ற செயல்களில் எதை வேண்டுமென்றாலும் முதலில் செய்யலாம். மற்றதை அடுத்துச் செய்யலாம்.

எடுத்துக்காட்டு: $(g_{ij}\, A^{j})_{,k} = g_{jl}\, A^{j}_{\ ,k}$ ($\because g_{ij}$ மாறிலிபோல் இயங்குகிறது).

$(g_{ij}\, A^{j})_{,k} = (A_{i})_{,k} = A_{i,k}$ [முதலில் இறக்கம் செய்யப்பட்டது]

$(g_{ij}\, A^{j})_{,k} = g_{ij} A^{j}_{,k} = A_{i,k}$ (முதலில் உடன்மாறி வகையிடல் செய்யப்பட்டது)

64. உடன்மாறி வகையிடலின் விதிகள்

உடன்மாறி வகைக் கெழுக்கள் கீழ்க்கண்ட விதிகளுக்குக் கட்டுப்படுகின்றன.

விதி 1: இரு பண்புருக்களின் கூட்டுத்தொகையின் (கழித்தல் பலனின்) உடன்மாறி வகைக்கெழு, அவற்றின் உடன்மாறி வகைக் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை (கழித்தல் பலன்) ஆகும்.

இது வரையறையிலிருந்தே தெளிவு

விதி 2: இரு பண்புருக்களின் புற (அக)ப் பெருக்கற்பலனின் உடன் மாறி வகைக்கெழு, ஒவ்வொரு பண்புருவையும் மற்றதன் உடன்மாறி வகைக்கெழுவையும் புற (அக)ப் பெருக்குவதால் வரும் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

இந்த விதி இரு சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் சாதாரண வகையிடலின் விதி போன்றதே.

நிருபணம் : A_{ij}, B^k இவற்றின் புறப் பெருக்கற்பலனை x^mஐப் பொறுத்து உடன்மாறி வகையிடுவோமாக.

$$(A_{ij}\, B^k)_{,m} = \frac{\partial (A_{ij}\, B^k)}{\partial x^m} + A_{ij} \left\{ {k \atop ml} \right\} B^l$$
$$- B^k \left[\left\{ {l \atop im} \right\} A_{lj} + \left\{ {l \atop jm} \right\} A_{il} \right]$$
$$= B^k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^m} + A_{ij} \frac{\partial B^k}{\partial x^m} + A_{ij} \left\{ {k \atop ml} \right\} B^l$$
$$- B^k \left[\left\{ {j \atop im} \right\} A_{lj} + \left\{ {l \atop jm} \right\} A_{il} \right]$$
$$= B^k \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^m} - \left\{ {l \atop im} \right\} A_{lj} - \left\{ {l \atop jm} \right\} A_{il} \right]$$
$$+ A_{ij} \left[\frac{\partial B^k}{\partial x^m} + \left\{ {k \atop ml} \right\} B^l \right]$$

$$\therefore (A_{ij}\, B^k)_{,\, m} = B^k A_{ij,\, m} + A_{ij}\, B^l_{,\, m} \qquad \text{......(64.1)}$$

நிருபணத்தின் பொதுத்தன்மை நோக்கி எந்த இரு பண்புருக்களின் புறப்பெருக்கற் பலனுக்கும் இது பொருந்தும் என உணரலாம். அடுத்து $A_{ij}\, B^j$ என்ற அகப் பெருக்கற்பலனை எடுத்துக்கொள்வோம்.

64.1-ல் $k = j$ என்று பிரதியிட

$$(A_{ij}\, B^j)_{,\, m} = B^j\, A_{ij,\, m} + A_{ij}\, B^j_{,\, m}$$

எனவே விதி அகப்பெருக்கலுக்கும் பொருந்தும் என்க.

குறிப்பு : மேற்கண்ட விதியைப் பயன்படுத்தியும், உடன் மாறி வகையிடலின்போது g^{ij}, g_{ij}, δ^i_j என்பன மாறிலிகள் போன்று இயங்குகின்றன என நிருபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$(g^{ij}\, A_{il})_{,\, m} = g^{ij}_{,\, m}\, A_{il} + g^{ij}\, A_{il,\, m}$$
$$= g^{ij}\, A_{il,\, m} \quad [\because g^{ij}_{,\, m} = 0]$$

முடிவு : $\varepsilon_{ijk,\, l} = 0$ ......(64.2)

நிருபணம் : ஒரு செவ்வக தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக் கொண்டால் ε_{ijk} ன் கூறுகள் யாவும் மாறிலிகள், எனவே இச்செவ்வக அமைப்பில் $\varepsilon_{ijk,\, l} = 0$.

நூற்பிரிவு 29—முடிவு 4ன் படி ஒரு பண்புருவின் கூறுகள் ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில் பூச்சியங்கள் ஆனால் ஒவ்வோர் இலக்கெண் அமைப்பிலும் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

எனவே எல்லா இலக்கெண் அமைப்பிலும்

$$\varepsilon_{ijk},\ _l=0$$

இவ்வாறே $\varepsilon^{ijk},\ _l=0$ ஆகும்.

65. உயர் அடைவு உடன்மாறி வகைக்கெழுக்கள்

உடன்மாறி வகைக்கெழுக்களின் உடன்மாறி வகைக்கெழுக்களும் பண்புருக்களே. இவற்றை இரண்டாம் அடைவு உடன் மாறி வகைக்கெழுக்கள் என்கிறோம். இரண்டாம் அடைவு உடன் மாறி வகைக்கெழுவை, இன்னும் ஒரு சுட்டிணைப்பைச் சேர்ப்பதன் மூலம் குறிக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு: x^k ஐப் பொருத்து $A_{i},\ _j$ ன் உடன்மாறி வகைக்கெழு $=A_{i},\ _{jk}$

மேற்கண்ட குறியீட்டு முறையை நீட்டி மூன்றும், நான்காம் முதலிய உயர் அடைவு உடன்மாறி வகைக்கெழுக்களைக் குறிக்கலாம்

66. மாதிரிக்கணக்குகள்

கணக்கு 1: உடன்மாறி வகைக்கெழுக்கள் காண்க

(i) $g_{ij}\,A^j$ (ii) $\delta^i_j\,A^j$ (iii) A^{ij}_{kl} (iv) $A^{ij}\,B_{kl}$

(i) $(g_{ij}\,A^j),\ _k=g_{ij}\,A^j_{\ ,k}$

(ii) $\left(\delta^i_j\,A^j\right),\ _k=\delta^i_j\,A^j_{\ ,k}$

$$\text{(iii)}\quad A^{ij}_{kl,\,m}=\frac{\partial A^{ij}_{kl}}{\partial x^m}+\begin{Bmatrix} i \\ nm \end{Bmatrix} A^{nj}_{kl}+\begin{Bmatrix} j \\ nm \end{Bmatrix} A^{in}_{kl}$$

$$-\begin{Bmatrix} n \\ km \end{Bmatrix} A^{ij}_{nl}-\begin{Bmatrix} n \\ lm \end{Bmatrix} A^{ij}_{kn}$$

(iv) $(A^{ij}\,B_{kl}),\ _m=A^{ij}\,B_{kl},\ _m+B_{kl}\,A^{ij}_{\ ,m}$

கணக்கு 2 : $A_{ij}=B_{i,\,j}-B_{j,\,i}$ என்றால்

(i) $A_{ij,\,k}+A_{jk,\,i}+A_{ki,\,j}=0$ எனவும்

(ii) $\dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}+\dfrac{\partial A_{jk}}{\partial x^i}+\dfrac{\partial A_{ki}}{\partial x^j}=0$ எனவும் நிருபி.

நிருபணம் : $A_{ij}=B_{i,\,j}-B_{j,\,i}$ ......(66.1)

எனவே A_{ij} ஓர் எதிர்ச்சீர் பண்புரு

அதாவது $A_{ij}=-A_{ji}$ ......(66.2)

மேலும் $B_{i,\,j}-B_{j,\,i}=\dfrac{\partial B_i}{\partial x^j}-\dfrac{\partial B_j}{\partial x^i}$ ......(66.3)

இனி $A_{ij,\,k}=\dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}-\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}A_{lj}-\begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix}A_{il}$ ...... (66.4)

அதாவது $A_{ij,\,k}=\dfrac{\partial}{\partial x^k}\left[\dfrac{\partial B_i}{\partial x^j}-\dfrac{\partial B_j}{\partial x^i}-\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}A_{lj}-\begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix}A_{il}\right.$

......(66.5)

$i, j, k,$ இவற்றை வட்ட வரிசையில் மாற்ற

$$A_{jk,\,i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial B_j}{\partial x^k}-\frac{\partial B_k}{\partial x^j}\right]-\begin{Bmatrix} l \\ ji \end{Bmatrix}A_{lk}-\begin{Bmatrix} l \\ ki \end{Bmatrix}A_{jl} \quad \text{......(66.6)}$$

$$A_{ki,\,j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial B_k}{\partial x^i}-\frac{\partial B_i}{\partial x^k}\right]-\begin{Bmatrix} \\ kj \end{Bmatrix}A_{li}-\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}A_{kl} \quad \text{......(66.7)}$$

A_{ij} எதிர்ச்சீர் உடையது என்பதையும், இரண்டாம் வகை கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் கீழ்க்குறிகளில் சமச்சீர் உடையன என்பதையும் மனத்தில் கொண்டு 66.5, 66 6, 66.7 இவற்றைக் கூட்டினால்

$$A_{ij,\,k}+A_{jk,\,i},+A_{ki,\,j}=0. \quad (1)$$

இரண்டாவது முடிவைப்பெற 66.4-ல் உள்ளவாறு $A_{ij,k}$ ன் உருவத்தை ஏற்று, முன்போலவே i, j, k களை வட்ட வரிசையில் மாற்றிக் கூட்ட வேண்டும். கூட்டினால்,

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j}=0.$$

67. உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்கள்

வரையறை : $A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n}$ என்னும் பண்புருவை எடுத்துக் கொள்வோம். $x^i = x^i(t)$ என்னும் வளைவின் ஊடே அதன் கூறுகள் t-ன் சார்புகள் என்க. அவ்வாறாயின்

$$\frac{\delta A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n}}{\delta t} \equiv A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n,\, k} \frac{dx^k}{dt} \qquad \dots\dots(67.1)$$

என்பதைப் பண்புருவின் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு (Intrinsic derivative) என்கிறோம்.

எனவே உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு மூலப்பண்புருவைப் போன்று அதே அடைவும் தன்மையும் உடைய பண்புருவாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $$\frac{\delta A^i}{\delta t} = A^i_{,j} \frac{dx^j}{dt} = \left[\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} i \\ jl \end{Bmatrix} A^l\right] \frac{dx^j}{dt}$$

$$\therefore \frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{dA^i}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ jl \end{Bmatrix} A^l \frac{dx^j}{dt} \qquad \dots\dots(67.2)$$

(ii) $$\frac{\delta A_i}{\delta t} = A_{i,\, j} \frac{dx^j}{dt} = \left[\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} A_l\right] \frac{dx^j}{dt}$$

$$\therefore \frac{\delta A_i}{\delta t} = \frac{dA_i}{dt} - \begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} A_l \frac{dx^j}{dt} \qquad \dots\dots(67.3)$$

(iii) $$\frac{\delta A^i_j}{\delta t} = A^i_{j,\, k} \frac{dx^k}{dt}$$

$$= \left[\frac{\partial A^i_j}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} A^l_j - \begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} A^i_m\right] \frac{dx^k}{dt}$$

$$= \frac{dA^i_j}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} A^l_j \frac{dx^k}{dt} - \begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} A^i_m \frac{dx^k}{dt}.$$

குறிப்பு 1 : I என்பது ஒரு மாற்றமிலி ஆனால்

$$\frac{\delta I}{\delta t} = I_{,k} \frac{dx^k}{dt} = \frac{\delta I}{\delta x^k} \cdot \frac{dx^k}{dt} = \frac{dI}{dt}$$

எனவே I-ன் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு, அதன் மொத்த வகைக்கெழு (Total derivative) ஆகும்.

குறிப்பு 2 :

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta g^{ij}}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta \delta^i{}_j}{\delta t} = 0$$

குறிப்பு 3 : உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுவின் வரையறையிலிருந்தே, அது உடன்மாறி வகைக்கெழு கட்டுப்படும் அதே விதிகளுக்குக் கட்டுப்படும் என்பது தெளிவு.

68. உயர்அடைவு உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்கள்

உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுவின் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுவும் ஒரு பண்புருவே. இதை இரண்டாம் அடைவு உள்ளாாந்த வகைக்கெழு என்கிறோம்.

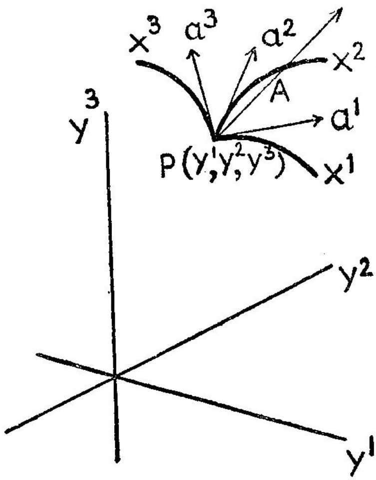
எடுத்துக்காட்டாக

$$\frac{\delta^2 A^i_j}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta A^i_j}{\delta t}\right) \left(A^i_{j,k} \frac{dx^k}{dt}\right)_{,l} \frac{dx^l}{dt}$$

இவ்வாறே மூன்றும், நான்காம் முதலிய அடைவு உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்களை வரையறை செய்யலாம்.

குறிப்பு : பொதுவாக, உள்ளார்ந்த வகையிடல் இயற்கணித மாற்று விதிக்குக் கட்டுப்பட்டதன்று.

69. உடன்மாறி வகைக்கெழுவின் விளக்கம்



நம் சாதாரண முப்பரிமாண வெளியில் $0-y^1y^2y^3$ என்னும் ஒரு செங்கோண தெக்காட்டின் அமைப்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

A என்னும் வெக்டர் $P\ (y^1, y^2, y^3)$ ல் மையங்கொண்டிருக்கட்டும். Pயைச் சுற்றியுள்ள வெளியின் R என்னும பகுதியிலும் வெக்டர் **A** ஐ வரையறை செய்வோம். இப்பகுதி R ல் உள்ள **A** என்ற வெக்டர்களின் முழுமை ஒரு வெக்டர் களத்தை உறுதி செய்கிறது.

R ல், வெக்டர் **A**ன் கூறுகள் y^i ன் தொடர்ந்து வகையிடக் கூடிய சார்புகளாக அமையட்டும். இப்போது $x^i = x^i\ (y^1, y^2, y^3)$ என்பவைகளால் வரையறை செய்யப்பட்ட ஒரு வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக் கொள்வோம $\gamma\ (x^1,\ x^2,\ x^3)$ என்பது Pன் அமைநிலை வெக்டர் ஆகும். இப்போது வெக்டர் **A** ன் கூறுகள் $A^i\,(x)$ எனக் குறிக்கப்படும். அவை x^iன் தொடர்ந்து வகையிடக் கூடிய சார்புகள்.

இனி, $\mathbf{a_i} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$ என்பன X-அமைப்பின் அடிப்படை வெக்டர்கள்

எனவே $\mathbf{A} = A^i \mathbf{a_i}$ ......(69.1)

$P\ (x^1, x^2, x^3)$ என்னும் புள்ளி $Q\ (x^1 + \delta x^1, x^1 + \delta x^1, x^3 + \delta x^3)$ க்கு மாறும் பொழுது $\triangle$ **A** என்பது **A** ல் ஏற்படும் மாற்றமாக இருக்கட்டும். எனவே 69.1 ல் இருந்து

$$\triangle \mathbf{A} = (A^i + \triangle A^i)\ (\mathbf{a_i} + \triangle \mathbf{a_i}) - A^i \mathbf{a_i}$$

$$= \triangle A^i \mathbf{a_i} + A^i \triangle \mathbf{a_i} + \triangle A^i \triangle \mathbf{a_i} \qquad ......(69.2)$$

சாதாரண நுண்கணிதத்தைப் போன்றே $d\mathbf{A}$ ஐ **A**ன் வகையீடு எனக் கொண்டால்

$$d\mathbf{A} = \mathbf{a_i}\ dA^i + A^i d\mathbf{a_i} \qquad ......(69.3)$$

69.3 ல் இருந்து **A**ன் வகையீட்டு மாற்றம் இருவித மாற்றங்களால் நிகழ்கிறது எனத் தெரிகிறது.

அவை (i) $x^1,\ x^2,\ x^3$ களின் மதிப்புகள் மாறும்போது A^i ன் கூறுகளில் ஏற்படும் மாற்றம்.

(ii) புள்ளி $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ நிலை மாறும்பொழுது $\mathbf{a_i}$ என்ற அடிப்படை வெக்டர்களில் ஏற்படும் மாற்றம் ஆவன.

அடுத்து $$\underset{\triangle x^j \to 0}{Lt}\ \frac{\triangle \mathbf{A}}{\triangle x^j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j}$$

எனவே 69.2 ல் இருந்து

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\ \mathbf{a_i} + \frac{\partial \mathbf{a_i}}{\partial x^j}\ A^i \qquad ......(69\ 4)$$

அடுத்து,

$$g_{ij} = \mathbf{a_i} \cdot \mathbf{a_j}$$

எனவே

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_j + \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_i \qquad \ldots\ldots(69{\cdot}5)$$

வட்ட வரிசையில் சுட்டிணைப்புகளை மாற்ற

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{a}_k + \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial x^i} \cdot \mathbf{a}_j \qquad \ldots\ldots(69{\cdot}6)$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial x^j} \cdot \mathbf{a}_i + \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} \mathbf{a}_k \cdot \qquad \ldots\ldots(69{\cdot}7)$$

$\dfrac{(69{\cdot}7) + (69{\cdot}6) - (69{\cdot}5)}{2}$ ஐ எழுத

$$[i\,j, k] = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial x^j} \cdot \mathbf{a}_i + \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{a}_k + \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^i} \cdot \mathbf{a}_k + \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial x^i} \cdot \mathbf{a}_j - \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_j - \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_i\right] \qquad \ldots\ldots(69{\cdot}8)$$

இனி

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^i}$$

எனவே, $\dfrac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^i}$ இவ்வாறே மற்றத் தொடர்புகளைச் சுட்டிணைப்புகளை வட்ட வரிசையில் மாற்றிப் பெறலாம்.

இவற்றை 69.8ல் பயன்படுத்த

$[i\,j, k] = \dfrac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{a}_k$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, $\dfrac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} = [i\,j, k]\, \mathbf{a}^k$

எனவே,
$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} \cdot \mathbf{a}^p = [i\,j, k]\, \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^p$$
$$= [i\,j, k]\, g^{kp}$$
$$= \left\{ {p \atop ig} \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial x^j} = \left\{ {p \atop ij} \right\} \mathbf{a}_p \qquad \ldots\ldots(69.9)$$

இதை 69.4 ல் பிரதியிட

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\ \mathbf{a}_i + \begin{Bmatrix} p \\ i\,j \end{Bmatrix} A^i \mathbf{a}_p$$

$$= \frac{\partial A^p}{\partial x^j}\ \mathbf{a}_p + \begin{Bmatrix} p \\ i\,j \end{Bmatrix} A^i\ \mathbf{a}_p$$

$$= \left[\frac{\partial A^p}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} A^i \right] \mathbf{a}_p \qquad \ldots\ldots(69.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j} = A^p_{\ ,j}\ \ \mathbf{a}_p \qquad \ldots\ldots(69.11)$$

எனவே முரண்மாறி வெக்டர் A^p-ன் உடன்மாறி வகைக்கெழு $A^p{}_{,j}$ என்பன $\mathbf{a}_i$ ஐ அடிப்படை வெக்டர்களாகக் கொண்ட இலக்கெண் அமைப்பில் $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j}$ என்னும் வெக்டரின் முரண்மாறிக் கூறுகள் ஆகும்.

அதாவது வெக்டர் **A**-ன் முரண்மாறிக் கூறுகள் A^p-க்களின் உடன்மாறி வகைக்கெழு என்பது வெக்டர் **A**-ன் பகுதிவகைக்கெழு $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j}$-ன் முரண்மாறிக் கூறுகள் ஆகும்.

மீண்டும் **A**-ஐ $\qquad \mathbf{A} = A_i\, \mathbf{a}^i \qquad \ldots\ldots(69.12)$

என எழுதினால் முன்போலவே

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\ \mathbf{a}^i + \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial x^k} A_i \qquad \ldots\ (69.13)$$

கிடைக்கிறது.

மேலும் $\mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j = \delta^i_j$

$$\therefore\ \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_j + \mathbf{a}^i . \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k} = 0 \qquad \ldots\ldots(69.14)$$

$$\therefore\ \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{a}_j = -\, \mathbf{a}^i . \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x^k}$$

$$= -\, \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_p \begin{Bmatrix} p \\ j\,k \end{Bmatrix} \qquad \ldots\ldots(69.9\text{-ன்படி})$$

$$= -\, \delta^i_p \begin{Bmatrix} p \\ jk \end{Bmatrix}$$

$$= -\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$$

எனவே

$$\frac{\partial \mathbf{a}^{\mathbf{i}}}{\partial x^k} = - \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \mathbf{a}^{\mathbf{j}} \quad \ldots\ldots(69.15)$$

69.13-ல் பிரதியிட

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \mathbf{a}^{\mathbf{i}} - \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \mathbf{a}^{\mathbf{j}} A_i$$

$$= \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \mathbf{a}^{\mathbf{j}} - \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \mathbf{a}^{\mathbf{j}} A_i$$

$$= \left[\frac{\partial A_j}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} A_i \right] \mathbf{a}^{\mathbf{j}}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k} = A_{j,\,k}\, \mathbf{a}^{\mathbf{j}} \quad \ldots\ldots(69.16)$$

எனவே உடன்மாறி வெக்டர் A_j-ன் உடன்மாறி வகைக்கெழு $A_{j,\,k}$ என்பன a^j - ஐ அடிப்படை வெக்டர்களாகக் கொண்ட இலக்கெண் அமைப்பில் $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k}$ என்னும் வெக்டரின் உடன்மாறிக் கூறுகள் ஆகும்.

குறிப்பு: வளைகோட்டிய அமைப்பு x-ஐ தெக்காட்டின் அமைப்பாக மாற்றினுல், அடிப்படை வெக்டர்கள் $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{a^i}$ என்பன ஒன்றின்மேல் ஒன்று பொருந்துகின்றன. மேலும் அவை மாறிலிகள் ஆகின்றன.

எனவே $\triangle\, \mathbf{a_i} = \triangle \mathbf{a^i} = 0$

எனவே $\triangle \mathbf{A} = (\triangle A^i)\, \mathbf{a_i} = (\triangle A_i)\, \mathbf{a^i}$

$$\therefore \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^p}{\partial x^j} \mathbf{a_p} = \frac{\partial A_p}{\partial x^j} \mathbf{a^p}$$

$$\therefore A^p_{\ ,\,j} = \frac{\partial A^p}{\partial x^j},\ A_{p,\,j} = \frac{\partial A_p}{\partial x^j}$$

70. உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுவின் விளக்கம்

ஒரு யூக்லிடின் வெளியில் ஏதோ ஒரு பகுதியில் ஒரு வெக்டர் களம் $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.

$C : x^i = x^i(t) \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ என்பது அப்பகுதியில் உள்ள ஒரு வளைவு என்க.

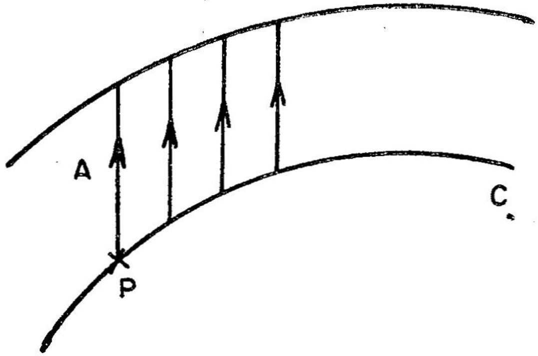
A (x) ன் கூறுகள் t என்னும் ஒட்டளவையின் சார்புகள்.

எனவே
$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt}$$
$$= A^p_{\ ,j} \frac{dx^j}{dt} \mathbf{a}_p$$
$$= \left[\frac{\partial A^p}{\partial x^j} + \left\{ {p \atop ij} \right\} A^i \right] \frac{dx^j}{dt} \mathbf{a}_p \qquad \ldots\ldots(70.1)$$
$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left[\frac{dA^p}{dt} + \left\{ {p \atop ij} \right\} A^i \frac{dx^j}{dt} \right] \mathbf{a}_p$$
$$= \frac{\partial A^p}{\partial t} \mathbf{a}_p \qquad \ldots\ldots(70{\cdot}2)$$

எனவே A^p என்னும் முரண்மாறி வெக்டரின் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு $\frac{\partial A^p}{\partial t}$ என்பது ஒரு வெக்டர். அதன் கூறுகள் $\mathbf{a}_i$ -ஐ அடிப்படை வெக்டர்களாகக் கொண்ட இலக்கெண் அமைப்பில் $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ ன் கூறுகள் ஆகும்.

71. இணை வெக்டர் களங்கள் (Parallel Vector Fields)

$x^i = x^i\ (t)$ என்பது ஒரு வெளியின் ஒரு பகுதியில் வரையறை செய்யப்பட்ட C என்ற வளைவு ஆக இருக்கட்டும்.



Cன் மேல் அமைந்த P என்ற புள்ளியில் உள்ள **A** என்ற வெக்டரை எடுத்துக் கொள்வோம். **A**க்கு நீளத்தில் சமமானதும், திசையில் இணையானதும் ஆன வெக்டர்களை C ன் மேலுள்ள

ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அமைக்கலாம். இவ்வாறு ஒரு வளைவு C ன் வழியே அமைக்கப்பட்ட இணை வெக்டர்களின் கூட்டத்தை **இணை வெக்டர் களம்** என்கிறோம்.

அடுத்து ஒரு வெக்டர் களம் இணையாக அமைவதற்குத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடுகளைக் கண்டுபிடிப்போமாக.

$\mathbf{A}$ என்பது C என்னும் வளைவின் வழியே அமைந்த ஓர் இணை வெக்டர் களம் எனின் அந்த வெக்டர்கள் வளைவின் வழியே மாறுவதில்லை. எனவே $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}=0$

$$\text{ஆனால்}\quad \frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\delta A^p}{\delta t}\,\mathbf{a_p}$$

எனவே $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}=0$ எனில் $\dfrac{\delta A^p}{\delta t}=0$

$$\text{அதாவது}\quad \frac{dA^p}{dt}+\left\{ {p \atop ij} \right\} A^i\,\frac{dx^j}{dt}=0 \qquad \text{......(71.1)}$$

∴ இணை வெக்டர் களம் A ன் கூறுகள் A^p 71.1 ல் கொடுக்கப்பட்ட ஒருங்கை வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும். எனவே கட்டுப்பாடு 71.1 தேவையானது.

இனி அந்தக் கட்டுப்பாடு போதுமானது என நிரூபிப்போம். அதாவது 71.1 ன் ஒவ்வொரு தீர்வும் C ன் வழியே ஓர் இணை வெக்டர் களத்தைத் தருகிறது என நிரூபிக்க வேண்டும்

வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளின் கொள்கையிலிருந்து A^i-ன் கூறுகளின் மதிப்பு C ன்மேல் ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் தரப்பட்டால் 71.1 ல் உள்ள முதல் அடைவு சமன்பாடுகளுக்குத் தன்னிகரில்லாத் தீர்வு உண்டு என நமக்குத் தெரியும். ஆனால் 71.1 ஐ நாம் அடைந்த முறையிலேயே C ன் ஒரு புள்ளியில் ஒரு வெக்டரை எடுத்துக் கொண்டு அதற்கு இணையாக வெக்டர்களை அமைத்தால் அத்தகைய வெக்டர் களம் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது என அறிகிறோம். எனவே C ன் வழியே இணையாக உள்ள எந்த ஒரு வெக்டர் களமும் 71.1 ஐ நிறைவு செய்கிறது. எனவே அந்தக் கட்டுப்பாடு போதுமானது.

குறிப்பு 1 : A_i என்பன $\mathbf{A}$ ன் உடன்மாறிக் கூறுகள் ஆனால்

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\delta A_i}{\delta t}\,\mathbf{a^i}$$

எனவே $\frac{\delta A_i}{\delta t}=0$ என்பது கட்டுப்பாடு

அதாவது $$\frac{dA_i}{dt}-\left\{ {l \atop ik} \right\} A_l \frac{dx^k}{dt}=0 \qquad \ldots\ldots(71.2)$$

குறிப்பு 2: P ல் உள்ள வெக்டருக்கு இணையாக Q ல் வரையப்படும் வெக்டர் P, Q இவற்றைச் சேர்க்கும் வளைவைப் பொறுத்தது. எனவே ஓர் அடைத்த வளைவில் (closed curve) இணைவெக்டர்களை வரைந்துகொண்டே மீண்டும் தொடங்கிய புள்ளிக்கே வருவோமாஞல் ஆரம்ப வெக்டரே திரும்ப வரவேண்டு மென்பது அவசியமல்ல.

எடுத்துக்காட்டு: ஓர் அலகு கோளத்தின் வளைவுதளத்தை எடுத்துக்கொள்வோம், கோளத்துருவ இலக்கெண்களை எடுத்துக் கொண்டால் $x^1=\theta$, $x^2=\psi$

இந்தத் தளத்தின் அளவை உரு

$$(ds)^2 = (d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\psi)^2$$

பூச்சியமாகாத இரண்டாம் வகை கிறித்தஃபல் குறியீடுகள்

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -\sin\theta\,\cos\theta, \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \cot\theta$$ என்பன.

A^i என்னும் வெக்டரை இணையாக நகர்த்துவதற்காக $\theta=\alpha$ என்ற வட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்த வட்டத்தின் வழியே

$$\frac{d\theta}{dt}=0$$

எனவே $$\frac{dA^1}{d\psi} - \cos\alpha\,\sin\alpha\,A^2 = 0$$

$$\frac{dA^2}{d\psi} + \cot\alpha\,A^1 = 0$$

தீர்வு காண

$$A^1 = \sin\alpha\,[\,C\sin(\psi\cos\alpha) + d\cos(\psi\cos\alpha)]$$

$$A^2 = C\cos(\psi\cos\alpha) - d\sin(\psi\cos\alpha)$$

இங்கே C, d என்பன மாறிலிகள்

$\psi=0$ என்ற புள்ளியில் A^i ஐ $(1, 0)$

ஆகக் கொண்டால், பிரதியிட

$C=0, d=\operatorname{cosec}\alpha$

எனவே A^i என்பது $\left[\cos(\psi\cos\alpha), -\dfrac{\sin(\psi\cos\alpha)}{\sin\alpha}\right]$

எனவே ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றியபின்

$\psi=2\pi$ எனவே $A^i=\left[\cos(2\pi\cos\alpha)-\dfrac{\sin(2\pi\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]$

இது ஆரம்ப வெக்டர் (1, 0) லிருந்து மாறுபட்டுள்ளது

தெளிவு. $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ ஆனல் இணையாக வெக்டர்களை வரைந்து கொண்டே போகும்போது ஆரம்பப் புள்ளியில், ஆரம்ப வெக்டர் (1, 0) மீண்டும் வருகிறது.

குறிப்பு 3: இணை வெக்டர் களத்தை ஒரு வளைவின் வழியே வரையறை செய்தோம். இக்கருத்தை நீட்டி இணை வெக்டர் களத்தை ஒரு வெளியில் வரையறை செய்தால் அதற்குக் கட்டுப் பாடு என்ன? அதனல் வரும் இடர்ப்பாடு என்ன? என்பதைப் பார்ப்போம்.

$P(x)$ என்ற புள்ளியில் A என்ற வெக்டரை எடுத்துக்கொள் வோம். இதற்கு இணையாக வெளியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் A-க்குச் சமநீளமுள்ள வெக்டரை வரைந்தால் அந்த வெக்டர் களின் கூட்டம் அந்த வெளியில் ஓர் இணை வெக்டர் களத்தை உறுதி செய்கிறது. P வழியே செல்லும் C என்னும் ஒரு வளைவை எடுத்துக் கொண்டால் C ல் அமைந்த வெக்டர் தளம் A^i 71.1-ஐ நிறைவு செய்கிறது.

எனவே $$\frac{dA^p}{dt}+\left\{ {p \atop ij} \right\} A^i \frac{dx^j}{dt}=0 \qquad \text{......(71.1)}$$

ஆனல் A^i வெளியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வரையறை செய்யப் பட்டுள்ளதால்

$$\frac{dA^i}{dt}=\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\ \frac{dx^j}{dt}$$

71.1 ல் பிரதியிட

$$\left[\frac{\partial A^i}{\partial x^j}+\left\{ {p \atop ij} \right\} A^i\right]\frac{dx^j}{dt}=0$$

அதாவது $\left(A^{i}_{,j}\right)\frac{dx^j}{dt} = 0$

இந்தக் கட்டுப்பாடு P ன் வழியாகச் செல்லும் எல்லா வளைவுகளுக்கும் பொருந்தும். அதாவது $\frac{dx^j}{dt}$ ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். எனவே $A^{i}_{,j} = 0$.

ஆனால் $A^{i}_{,j} = 0$ என்று வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள், பொதுவாக இசைவு (consistency) உடையன அன்று. எனவே இணை வெக்டர் களத்தைச் சாதாரணமாக ஒரு வெளியில் வரையறை செய்வது கிடையாது. ஒரு வளைவின் புள்ளிகளில் அமைந்துள்ள இணை வெக்டர்களையே நாம் இணைவெக்டர் களமாகக் கொள்கிறோம்.

72. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1: t ன் வகையிடக்கூடிய சார்புகளாக உள்ள கீழ் கண்ட பண்புரு களங்களுக்கு உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்களைக் காண்க.

(i) A^{ij} (ii) $A_i B^j$ (iii) ϕA_{ij} (ϕ என்பது மாற்றமிலி)

(i) $$\frac{\delta A^{ij}}{\delta t} = \left(A^{ij}_{,k}\right)\frac{dx^k}{dt}$$

$$= \left[\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} A^{lj} + \begin{Bmatrix} j \\ lk \end{Bmatrix} A^{il}\right]\frac{dx^k}{dt}$$

$$= \frac{dA^{ij}}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} A^{lj}\frac{dx^k}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ lk \end{Bmatrix} A^{il}\frac{dx^k}{dt}$$

(ii) $$\frac{\delta}{\delta t}(A_i B^j) = A_i\frac{\delta B^j}{\delta t} + B^j\frac{\delta A_i}{\delta t}$$

$$= \left[A_i B^{j}_{,k} + B^j A_{i,k}\right]\frac{dx^k}{dt}$$

$$= A_i\left[\frac{dB^j}{dt} + \begin{Bmatrix} j \\ l\,k \end{Bmatrix} B^l \frac{dx^k}{dt}\right]$$

$$+ B^j\left[\frac{dA_i}{dt} - \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} A_l\frac{dx^k}{dt}\right]$$

(iii) $\frac{\delta}{\delta t}\left(\phi\, A^{i}_{j}\right)=\phi\,\frac{\delta A^{i}_{j}}{\delta t}+\frac{\delta\phi}{\delta t}A^{i}_{j}$

$$=\phi\left[\frac{dA^{i}_{j}}{dt}+\begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} A^{l}_{j}\frac{dx^{k}}{dt}-\begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} A^{i}_{l}\frac{dx^{k}}{dt}\right]$$

$$+A^{i}_{j}\frac{d\phi}{dt}.$$

கணக்கு, 2: கீழ்க்கண்டவற்றின் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்களைக் கணக்கிடுக.

(i) $g_{ij}\,A^{j}$ (ii) $\delta^{i}_{j}\,A_{i}$ (iii) $g_{ij}\,\delta^{i}_{r}\,A^{r}_{p}$

(i) $\frac{\delta}{\delta t}(g_{ij}\;A^{j})=g_{ij}\,\frac{\delta A^{j}}{\delta t}$

$$=g_{ij}\left[\frac{dA^{j}}{dt}+\begin{Bmatrix} j \\ rl \end{Bmatrix} A^{l}\,\frac{dx^{r}}{dt}\right]$$

(ii) $\frac{\delta\left(\delta^{i}_{j}\,A_{i}\right)}{\delta t}=\delta^{i}_{j}\,\frac{\delta A_{i}}{\delta t}$

$$=\delta^{i}_{j}\left[\frac{dA_{i}}{dt}-\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} A_{l}\,\frac{da^{k}}{dt}\right]$$

$$=\frac{dA_{j}}{dt}-\begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} A_{l}\frac{dx^{k}}{dt}.$$

(iii) $\frac{\delta}{\delta t}\left(g_{ij}\,\delta^{i}_{r}\,A^{r}_{p}\right)=g_{ij}\,\delta^{i}_{r}\,\frac{\delta A^{r}_{p}}{\delta t}$

$$=g_{ij}\,\delta^{i}_{r}\left[\frac{dA^{r}_{p}}{dt}+\begin{Bmatrix} r \\ lk \end{Bmatrix} A^{l}_{p}\,\frac{dx^{k}}{dt}-\begin{Bmatrix} l \\ pk \end{Bmatrix} A^{r}_{l}\,\frac{dx^{k}}{dt}\right]$$

$$=g_{rj}\left[\frac{dA^{r}_{p}}{dt}+\begin{Bmatrix} r \\ lk \end{Bmatrix} A^{l}_{p}\,\frac{dx^{k}}{dt}-\begin{Bmatrix} l \\ pk \end{Bmatrix} A^{r}_{l}\,\frac{dx^{k}}{dt}\right]$$

73. சாய்வு விகிதம், பாய்வு, சுழல் இவற்றின் பண்புரு தோற்றங்கள் (Tensor forms of gradient, divergence and curl).

சாய்வு விகிதம் (gradient)

ϕ என்பது ஒரு அளவிப்புள்ளிச்சார்பாக இருக்கட்டும். அதன் உடன்மாறி வகைக்கெழுவை அதன் சாய்வு விகிதம் என்கிறோம். $\nabla\phi$ அல்லது grad ϕ ஆல் குறிக்கிறோம்.

எனவே $\nabla\phi = \text{grad } \phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x^i} = \phi, i.$ ......(73.1)

சாதாரண வெக்டர் கணிதத்தில் ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார்பின் சாய்வு விகிதத்தை வரையறை செய்வதில்லை. அதாவது **A** ஒரு வெக்டரானால் ∇**A** வரையறை செய்யப்படுவதில்லை. ஆனால் பண்புரு கணிதத்தில் Δ**A**-ஐ **A**-ன் உடன்மாறி வகைக் கெழு என வரையறை செய்கிறோம்.

எனவே $\nabla\mathbf{A} = \text{grad } \mathbf{A} = A_{i,j}$ ......(73.2)

பாய்வு (Divergence)

முரண்மாறி வெக்டரின் பாய்வு

A^i என்பது ஒரு முரண்மாறி வெக்டர் என்க. x^k-ஐப் பொருத்து இதன் உடன்மாறி வகைக்கெழு $A^i,_k$ ஆகும். இதன் குறுக்கம் $A^i,_i$ ஆகும். இந்தக் குறுக்கத்தை A^i ன் பாய்வு என்கிறோம்.

அதை div $\mathbf{A^i}$ அல்லது ∇, A ஆல் குறிப்பிடுகிறோம்.

$\nabla \cdot A = div\, A^i = A^i,_i$ ......(73.3)

மேலும்

$$A^i,_i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \left\{ {i \atop r\, i} \right\} A^r$$

$$= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^r \frac{\partial}{\partial x^r} \log \sqrt{g}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^r} (\sqrt{g}\, A^r)$$

$\therefore\ div\, A^i = A^i,_i = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^r} (\sqrt{g}\, A^r)$ ......(73.4)

A^i என்பன வெக்டர் **A**-ன் முரண்மாறிக் கூறுகள் ஆயின் $div\ A^i$ ஐ div **A** என்றே குறிப்பிடலாம்.

உடன்மாறி வெக்டரின் பாய்வு

உடன்மாறி வெக்டர் A_i ன் பாய்வை $div\ A_i = g^{jk} A_{j,k}$ (73.5) என வரையறை செய்கிறோம்.

சுழல் (curl)

A என்பது ஒரு வெக்டர் என்க. $\varepsilon^{kji} A_{i,j}$ ஐ வெக்டர் A_i ன் சுழல் என்கிறோம். அதை $\nabla \times \mathbf{A}$ அல்லது Curl A_i எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{curl } A_i = \varepsilon^{kji} A_{i,j} = -\varepsilon^{ijk} A_{i,j}. \quad \ldots\ldots(73.6)$$

இதன் கூறுகள் $\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right)$, $\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right)$, $\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)$ என்பது தெளிவு.

லாப் லாசியன் (Laplacian)

ϕ என்பது ஓர் அளவிப் புள்ளிச் சார்பு என்க. இதன் சாய்வு விகிதம் $\nabla \phi$ எனும் வெக்டர் ஆகும். இந்த வெக்டரின் பாய்வை ϕ ன் லாப் லாசியன் என்கிறோம். அதை $\nabla^2\phi$ ஆல் குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே $\nabla^2\phi = div\ \phi_{,i} = g^{ij}\ \phi_{,ij}$ ......(73.7)

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g}\, g^{ij}\, \phi_{,i}\right)$$

சாதாரண வெக்டர் கணிதத்தில் **A** ஒரு வெக்டர் எனில் ∇^2**A** க்கு விளக்கம் கிடையாது. ஆனால் பண்புரு கணிதத்தில்

$$\nabla^2 \mathbf{A} = g^{ij} A_{k,ij} \quad \ldots\ldots(73.8)$$

என வரையறை செய்கிறோம்.

குறிப்பு : மேலே கொடுக்கப்பட்ட வரையறைகள் யாவும் நமக்குப் பழக்கமான வெக்டர் கணித வரையறைகளுடன் ஒத்திசைவுடன் இருப்பதை எளிதில் உணரலாம்.

வெக்டர் கணித வரையறைகள் யூக்லிடின் முப்பரிமாண வெளியில் வரையறை செய்யப்பட்டவை. எனவே

1. சாதாரண வெக்டர் கணிதத்தில்

$$\nabla.\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\, \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\, \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\, \mathbf{e}_3$$

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ என்பன அடிப்படை அலகு வெக்டர்கள்

எனவே Δ ϕன் கூறுகள் $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$

அதாவது $\Delta \phi = \frac{\partial \phi}{x \partial^i}$ பண்புரு வரையறையுடன் ஒத்திருக்கிறது.

2. முப்பரிமாண யூக்லிடின் வெளியில் இரண்டாம் வகை கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன.

எனவே div $A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}$ நமக்குப் பழக்கமான வரையறை.

3. முப்பரிமாண யூக்லிடின் வெளியில்

$$g^{ij} = \delta^i_j . \quad \text{div } A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$$

எனவே $\Delta^2 \phi = \text{div } \phi,\ _i = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)$

$$= \delta^i_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)$$

$\therefore \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x^3)^2}$ நமக்குப் பழக்கமான தோற்றம்.

4. சாதாரண முப்பரிமாண வெளியில் $g = 1$.

எனவே curl A_i (அல்லது) $\varepsilon^{kji} A_{i,\ j}$ ன் கூறுகள்.

$$\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right), \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)$$

நமக்குப் பழக்கமான வரையறை.

74. முற்றொருமைகள் (Identities)

சாதாரண வெக்டர் கணிதத்தில் சாய்வு விகிதம், பாய்வு, சுழல் இவற்றின் தொடர்புகள் சிலவற்றை முற்றொருமைகளாக அமைத்தோம். அவற்றைச் சூத்திரங்களாகப் பயன்படுத்தி வெக்டர் நுண்கணிதக் கணக்குகளைச் செய்தோம். ஆனால் பண்புருக் குறியீட்டு முறையைப் பயன்படுத்தும்போது அத்தகைய முற்றொருமைகள், சூத்திரங்கள் தன்னியல்பாகத் தோன்றுகின்றன. எனவே அவற்றை மிகச் சிறப்பாகக் கவனிப்பதில்லை. இவ்வாறு தொடர்புகள் தன்னியல்பாகத் தோன்றுவது பண்புருக் குறியீட்டின் சிறப்பியல்புகளில் ஒன்றாகும். இருப்பினும் ஒரு சில முற்றொருமைகளை பண்புருக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி நிரூபித்துள்ளோம். மற்றவைகளையும், இது போன்றே நிரூபிக்கலாம்.

1. $\text{div } (\phi \mathbf{A}) \equiv \phi \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A}, \nabla\phi$

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned} \text{div } (\phi A) &= (\phi A^i),_i \\ &= \phi A^i,_i + A^i \phi,_i \\ &= \phi \text{div} A + A, \triangle\phi. \end{aligned}$$

2. $\text{div } (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \text{ curl } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ curl } \mathbf{B}$

நிரூபணம் : $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \varepsilon^{ijk} A_j B_k = C^i$ என்க.

எனவே $\text{div } (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \text{div } C^i = C^i_{\ ,i}$

$$\begin{aligned} &= (\varepsilon^{ijk} A_j B_k),_i \\ &= \varepsilon^{ijk} (A_j B_k,_i + B_k A_j,_i) \\ &= - A_j \varepsilon^{jik} B_k,_i + B_k \varepsilon^{ijk} A_j, \\ &= - \mathbf{A} \text{ curl } \mathbf{B} + \mathbf{B} \text{ curl } \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{div } (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B} \text{ curl } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ curl } \mathbf{B}$$

3. $\text{div curl } \mathbf{A} \equiv 0$

நிரூபணம் : $\text{curl } \mathbf{A} = \text{curl } A_l = \varepsilon^{kjl} A_l,_j = B^k$ என்க.

$$\begin{aligned} \text{div curl } \mathbf{A} &= \mathbf{B}^k{}_{,k} = (\varepsilon^{kjl} A_l,_j),_k \\ &= \varepsilon^{kjl} \ A_l,_{jk} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(∵ இணை இணையாக உறுப்புகள் அடிபடுகின்றன)

4. div grad $\phi \equiv \nabla^2\phi$

நிருபணம் : grad $\phi = \phi_{,i}$

$$\text{div grad } \phi = (g^{ij}\,\phi_{,j})_{,i}$$
$$= g^{ij}\,\phi_{,ji}$$
$$= \nabla^2 \phi$$

5. Curl $(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}$ div $\mathbf{B}-\mathbf{B}$ div $\mathbf{A}+\mathbf{B}.\nabla\mathbf{A}-\mathbf{A}.\nabla\mathbf{B}$

நிருபணம் : $\mathbf{A}\times\mathbf{B} \equiv \varepsilon^{ijk} A_j B_k = C^i$ என்க

அதாவது

$$C^i = \varepsilon^{ijk} A_j B_k$$

$\therefore$ $C_i = \varepsilon_{ijk} A^j B^k$ [நூற்பிரிவு 46 ன் முடிவுகள் 1, 2ன் படி]

எனவே

$$Curl\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = Curl\, C_i = \varepsilon^{mni} C_{i,n}$$
$$= \varepsilon^{mni}(\varepsilon_{ijk} A^j B^k)_{,n}$$
$$= \varepsilon^{mni}\varepsilon_{ijk}\left(A^j B^k_{\ ,n} + A^j_{\ ,n} B^k\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}} e^{mni}\sqrt{g}\, e_{ijk}\left(A^j B^k_{\ ,n} + A^j_{\ ,n} B^k\right)$$
$$= e^{mni}\, e_{jik}\left(A^i B^k_{\ ,n} + A^j_{\ ,n} B^k\right)$$
$$= e^{imn}\, e_{ijk}\left(A^j B^k_{\ ,n} + A^j_{\ ,n} B^k\right)$$
$$= \left(\delta^m_j \delta^n_k - \delta^m_k \delta^n_j\right)\left(A^j B^k_{\ ,n} + A^j_{\ ,n} B^k\right)$$
$$= A^m B^n_{\ ,n} - A^n B^m_{\ ,n} + A^m_{\ ,n} B^n - A^n_{\ ,n} B^m$$
$$= A \text{ div } B - \mathbf{A}.\nabla\mathbf{B} + B\cdot\nabla\mathbf{A} - B \text{ div } \mathbf{A}$$

75. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : வெக்டர் A^i ன் பாய்வின் இயற்பியல் கூறுகளை (i) உருளை (ii) கோளத்துருவ இலக்கெண்களில் தருக.

(1) உருளை இலக்கெண்களில்

$$x^1=\rho,\ x^2=\phi,\ x^3=z$$

$$g=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \rho^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho^2 \quad \therefore \sqrt{g}=\rho.$$

எனவே A_p, A_ϕ, A_z என்னும் இயற்பியல் கூறுகள் பின் வருமாறு :

$$A_p=\sqrt{g_{11}}\ A^1=A^1$$

$$A_\phi=\sqrt{g_{22}}\ A^2=\rho A^2$$

$$A_z=\sqrt{g_{33}}\ A^3=A^3$$

எனவே $\operatorname{div} A^i=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\ \dfrac{\partial}{\partial x^i}\ (\sqrt{g}\ A^i)$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g}\ A^1)+\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g}\ A^2)+\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g}\ A^3)\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\ (\rho A_p)+\frac{\partial}{\partial \phi}\ (A\phi)+\frac{\partial}{\partial z}\ (\rho A_z)\right]$$

(ii) கோளத்துருவ இலக்கெண்களில்

$$x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=\phi$$

$$g=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}=r^4\sin^2\theta$$

$$-\sqrt{g}=r^2\sin\theta.$$

எனவே இயற்பியல் கூறுகள் A_r, A_θ, A_ϕ பின்வருமாறு :

$$A_r=\sqrt{g_{11}}\ A^1=A^1$$

$$A_\theta=\sqrt{g_{22}}\ A^2=r\ A^2$$

$$A_\phi=\sqrt{g_{33}}\ A^3=r\sin\theta\ A^3$$

$$\therefore \quad \text{div } A^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\, A^i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} A^1) + \frac{\delta}{\partial x^2} (\sqrt{g} A^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{g} A^3) \right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta\, A_\theta)$$

$$+ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

கணக்கு 2: லாப்லாசியின் $\Delta^2 F$-ஐ (i) உருளை (ii) கோளத் துருவ இலக்கெண்களில் தருக. F என்பது ஓர் அளவி.

(i) உருளை இலக்கெண்களில்

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{\rho z}, \quad g^{33} = 1$$

எனவே $\Delta^2 F = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g}\, g^{kr} \dfrac{\partial F}{\partial x^r} \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{g}\, g^{11} \frac{\partial F}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sqrt{g}\, g^{22} \frac{\partial F}{\partial x^2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\sqrt{g}\, g^{33} \frac{\partial F}{\partial x^3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho . 1 \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\rho . \frac{1}{\rho z} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho . 1 \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

(ii) கோளத் துருவ இலக்கெண்களில்

$$x^1 = r, \; x^2 = \theta, \; x^3 = \phi$$

$$\sqrt{g} = r^2 \sin\theta$$

$$g^{11} = 1, \; g^{22} = \frac{1}{r^2}, \; g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$$

எனவே $\nabla^2 F = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{g}\, g^{kl} \frac{\partial F}{\theta x^l}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial F}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}\, g^{22} \frac{\partial F}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g}\, g^{33} \frac{\partial F}{\partial x^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta .1. \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r^2 \sin\theta . \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(r^2 \sin\theta . \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$$

பயிற்சி

1. $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = [jk,i] - [ij,k]$ என்று காட்டுக.

2. கீழ்கண்ட அளவை உருக்களுக்கு கிறித்த∴பல் குறியீடுகளைக் கணக்கிடவும்.

(i) $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

(ii) $(ds)^2 = (dx^1)^2 + F(x^1, x^2)(dx^2)^2$, இங்கு F என்பது x^1, x^2-க்களின் சார்பு ஆகும்.

3. $(ds)^2 = (dx^1)^2 + [(x^1)^2 + c^2](dx^2)^2$ எனின்

$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \frac{x^1}{(x^1)^2 + c^2}$$

$$\Gamma^{1}_{22} = -x^1$$

மற்ற இரண்டாம் வகைக் குறியீடுகள் $= 0$ என நிரூபி.

4. கீழ்கண்ட பண்புருக்களுக்கு x^r ஐப் பொருத்து உடன் மாறி வகைக்கெழு காண்க.

$$\text{(i)}\ A^{i}_{jk} \quad \text{(ii)}\ B^{ij}_{k} \quad \text{(iii)}\ C^{ij}_{kl} \quad \text{(iv)}\ A^{ijk}_{mn}$$

5. உடன்மாறி வகைக்கெழு காண்க.

(i) $g^{ij} A_j$ (ii) $\partial^i{}_j A_i$

6. $A_{i,j} - A_{j,i} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial A_j}{\partial x^i}$ எனக் காட்டுக.

7. $A^{ij}{}_{,j} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial x^j} (A^{ij} \sqrt{g}) + A^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ என நிரூபி. மேலும் A^{jk} எதிர்ச்சீர் உடையது, ஆனால் இரண்டாவது உறுப்பு மறையும் என நிரூபி.

8. $$A^{j}_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(A^{j}_{i} \sqrt{g} \right) - A^{j}_{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$$

எனக் காட்டுக.

9. $\dfrac{\delta}{\delta t} \left(\dfrac{dx^i}{dt} \right) = \dfrac{d^2 x^i}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \dfrac{dx^j}{dt} \dfrac{dx^k}{dt}$ என்று நிரூபி.

10. $\dfrac{d}{dt} (g^{pq} A_p A_q) = 2\, g^{pq} A_p \dfrac{\delta A_q}{\delta t}$ என்று காட்டுக.

11. t என்னும் ஒட்டளவையின் சார்புகளாலான கீழ்க்கண்ட பண்புருக் களங்களின் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்களைக் கணக்கிடுக.

(i) A_{ij} (ii) $A^{ij} B_k$ (iii) ϕA^{ij} (ϕ ஓர் அளவி)

12. உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு காண்க

(i) $g^{ij} A_j$ (ii) $\delta^{i}_{r} A^r$

13. $A^i(t)$, $B^i(t)$ என்பன ஒரு வளைவின் புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட இரு இணை வெக்டர் களங்கள் என்றால் (i) அவை ஒவ்வொன்றும் மாறாத நீளம் உடையவை (ii) அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணம் மாறாது என நிரூபி.

14. $A^j = g^{jk} A_k$ என்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி A_k ன் உடன்மாறி வகைக்கெழுவிலிருந்து A^j ன் உடன்மாறி வகைக் கெழுவை அடையவும்.

15. பண்புருக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $\text{grad } (\phi\psi) = \phi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \psi$

(ii) $\text{Curl } (\phi \mathbf{A}) = \text{grad } \phi \times \mathbf{A} + \phi \text{ Curl } \mathbf{A}$

(iii) $\text{Curl grad } \phi = 0$

(iv) $\mathbf{A} \times \text{Curl } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{Curl } \mathbf{A}$
$= \text{grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{A} . \nabla \mathbf{B} - \mathbf{B} . \nabla \mathbf{A}$

16. grad ϕ ன் இயற்பியல் கூறுகளை

(i) பரவளைய உருளை (ii) நீள்வட்ட உருளை இலக்கெண் களில் காண்க.

17. வெக்டர் $\mathbf{A}^i$ ன் பாய்வின் இயற்பியல் கூறுகளை (i) பரவளைய உருளை (ii) நீள்வட்ட உருளை இலக்கெண்களில் கண்டுபிடிக்க.

18. F ஓர் அளவி ஆனல் $\nabla^2 F$ ஐ பரவளைய உருளை இலக்கெண்களில் தருக.

8. குறுக்கடிகள்
(Geodesics)

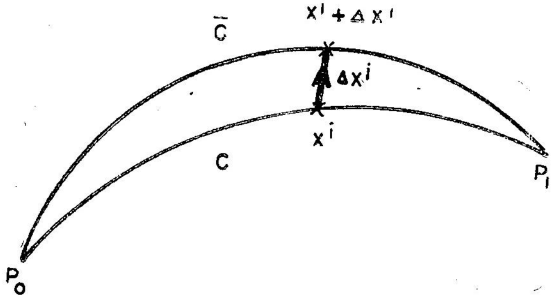
76. குறுக்கடி (Geodesic)

ஒரு வெளியிலோ அல்லது தளத்திலோ உள்ள இரு புள்ளிகளை அந்த வெளியில் அல்லது தளத்தில் அமைந்த பல்வேறு வளைவுகளால் சேர்க்கலாம். அவ்வளைவுகளில் மிகக்குறைந்த நீளம் உடைய வளைவைக் குறுக்கடி என்கிறோம். அதாவது குறுக்கடி என்பது புள்ளிகளுக்கு இடையே மிகக்குறைந்த தூரமுடைய பாதை. சாதாரண முப்பரிமாண வெளியிலும், சமதளத்திலும் நேர்கோடுதான் குறுக்கடியாகும். ஒரு கோளத்தின் தளத்தில் இருபுள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள மிகக்குறைந்த தூரம் அப்புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் பெருவட்டத்தினூடே அமைகிறது. எனவே புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் பெருவட்டமே கோளதளத்தில் குறுக்கடி ஆகும்.

இனி, இந்த அடிப்படைக் கருத்தைச் சற்று நீட்டி, N பரிமாண ரீமான் வெளியில் குறுக்கடியை வரையறை செய்வோம். N பரிமாண வெளியில் வரையறையைச் சிறிது மாற்றி அமைக்கிறோம். இருபுள்ளிகளுக்கிடையே மிகக் குறைந்த நீளமுடைய வளைவு என்பதனை மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு நீளமுடைய வளைவு என்று மாற்றிக் கொள்கிறோம். எனவே குறுக்கடியைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்கிறோம்.

வரையறை : இரு நிலையான புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் வளைவுகளில் ஏற்படும் யாதாமொரு சிறிய மாறுதல்களைப் பொருத்து மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு நீளமுடைய வளைவை அந்தப் புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் குறுக்கடி என்கிறோம்.

P_0, P_1 என்பன இரு நிலைப்புள்ளிகள் என்க. t-ஐ ஒட்டளவாகக் கொண்ட $x^i = x^i(t)$ என்னும் வளைவு c அவற்றை சேர்க்கட்டும்.



P_0, P_1 என்பனவற்றின் ஒட்டளவைகள் முறையே t_0, t_1 என்க. s என்பது P_0 P_1 இவற்றிற்கிடையே உள்ள c ன் நீளம் ஆயின்

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt}} \, dt \text{ ஆகும்.} \qquad \ldots\ldots(76.1)$$

P_0, P_1 இவற்றைச் சேர்க்குமாறு வரையப்படும் பல்வேறு வளைவுகளுக்கு ஏற்ப s மாறும். s ன் மதிப்பு மீச்சிறு அல்லது மீப் பெரு மதிப்பை அடையும் போது உள்ள வளைவே குறுக்கடி ஆகும்.

77. குறுக்கடியின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் (The differential equations of a geodesic).

அடுத்து, குறுக்கடியின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைக் கண்டு பிடிப்போம். "மாறுசார்புகளின் நுண்கணித"த்தை (Calculus of Variations) கற்க வாய்ப்பில்லாதவர்களும் புரிந்து கொள்ளும் முறையில் முதற் கொள்கைகளிலிருந்தே சமன்பாடுகளைப் பெறுவோம்.

Δx^i என்பது c ன் ஒவ்வொருபுள்ளி x^i லும் தொடர்ந்து மாறும் ஒரு சிறிய யாதாமொரு வெக்டராக இருக்கட்டும். அவ்வாறெனில்

$$\bar{x} = \bar{x}^i + \Delta x^i \qquad \ldots\ldots(77.1)$$

என்பது c க்கு மிக நெருங்கியுள்ள $\bar{C}$ என்னும் வளைவை வரையறை செய்கிறது.

மேலும் P_0, P_1 என்ற புள்ளிகளில் $\triangle x^i = 0$ என்க. அதாவது $\bar{C}$ வளைவு P_0, P_1 களைச் சேர்க்கும் வளைவு ஆகும்.

P_0, P_1 இடையே உள்ள $\bar{C}$ வளைவின்

$$\text{நீளம் } \bar{s} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d\bar{x}^j}{dt}}\, dt \qquad \ldots\ldots(77.2)$$

இங்கே $g_{ij}(\bar{x})$ என்பன $\bar{x}^i$ ன் சார்புகள்.

அடுத்து

$$g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d\bar{x}^j}{dt} = \left(g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \triangle x^k\right) \left(\frac{dx^i}{dt} + \frac{d(\triangle x^i)}{dt}\right)\left(\frac{dx^j}{dt} + \frac{d(\triangle x^j)}{dt}\right)$$

உயர் அடைவு உறுப்புகளை புறக்கணிக்க

$$g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{dt}\frac{d\bar{x}^j}{dt} = g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + 2 g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d(\triangle x^j)}{dt} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \triangle x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$$

$$= g_{ij} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \left[1 + \frac{2 g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d(\triangle x^j)}{dt} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \triangle x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \right]$$

இரு பக்கங்களிலும் வர்க்கமூலம் எடுத்து, உயர் அடைவு உறுப்புகளைப் புறக்கணிக்க

$$\sqrt{e\, g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{d} \frac{d\bar{x}^j}{dt}}$$

$$= \sqrt{e\, g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}$$

$$\left[1 + \frac{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d(\triangle x^j)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \triangle x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \right]$$

எனவே $\overline{C}$, C வளைவுகளுக்கிடையே உள்ள நீள மாற்றம் $\triangle s$ பின்வருமாறு.

$$\triangle s=\bar{s}-s=\int_{t_0}^{t_1}\frac{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{d(\triangle x^j)}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\triangle x^k\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}{\sqrt{e\,g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}}\,dt$$

இப்போது வில்தூரம் s ஐ C ன் ஒட்டளவையாகக் கொண்டால் அதாவது $t=s$

$$e\,g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=1 \qquad \text{......(77 3)}$$

எனவே

$$\triangle s=\int_{s_0}^{s_1}\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{d(\triangle x^j)}{ds}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\triangle x^k\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right]ds$$

இங்கே s_0, s, என்பன P_1, P, ன் ஒட்டளவைகள்.

பகுதிப்படுத்தித் தொகை காண

$$\triangle s=\left[g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\triangle x^j\right]_{s_0}^{s_1}-\int_{s_0}^{s_1}\triangle x^j\left[\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right]ds.$$

P_0, P_1 என்னும் இரு புள்ளிகளிலும் $\triangle x^j$ பூச்சியமாதலால் முதல் அடைப்புக்குள் உள்ள கோவை இரு எல்லைகளிலும் பூச்சியமாகிறது.

$$\therefore \triangle s=-\int_{s_0}^{s_1}\triangle x^j\left[g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^k}{ds}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right]ds.$$

சில போலிச் சுட்டிணைப்புகளில் மாற்றம் செய்து,

$$= -\int_{s_0}^{s_1} \triangle x^j \left[g_{ij} \frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^k}{ds}\right] ds$$

$$= -\int_{s_0}^{s_1} \triangle x^j \left[g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + [ik, j]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right] ds$$

$\triangle x^j$ ன் மாறுதல்கள் யாதாமொரு தன்மைத்தன. எனவே வளைவு C ஒரு குறுக்கடியாவதற்கு தேவையும் போதும் ஆன கட்டுப்பாடு $\triangle s = 0$

அதாவது $$g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + [ik, j]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \qquad \ldots\ldots(77.4)$$

g^{jl} ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$\frac{d^2x^l}{ds^2} + \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^k}{ds} = 0 \qquad \ldots\ldots(77.5)$$

அதாவது $$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^l}{d_s}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots(77.6)$$

77·5 ல் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் குறுக்கடியின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

77 5–ல் N சமன்பாடுகள் அடங்கியுள்ளன.

ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் $x^l, \dfrac{dx^i}{ds}$ இவற்றின் தொடக்கமதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் $\bar{x}^i = x^i\ (s)$ என்னும் தீர்வு, தன்னேரில்லாதபடி உறுதி செய்யப்படும் என்று "வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக் கொள்கைகள்" (theory of differential equations) சாற்றுகின்றன. எனவே "வெளியின் ஒரு புள்ளியில் எந்த ஒரு திசையை எடுத்துக் கொண்டாலும் அத்திசையில் ஒரு தன்னேரில்லாத குறுக்கடி உண்டு."

இரு புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் வளைவுகளைக் கொண்டே நாம் குறுக்கடியை வரையறை செய்தோம். ஆனால் இந்த இரு புள்ளிகளும் போதுமான அளவு நெருங்கி இருந்தாலன்றி குறுக்கடி தன்னேரில்லாததாக அமையாது.

எடுத்துக்காட்டு : கோளத்தின் மேல் உள்ள எந்த இரு புள்ளிகளையும் ஒரு தன்னேரில்லாத குறுக்கடி (பெருவட்டம்) இணைக்கிறது. ஆனால் அந்த இரு புள்ளிகளும் விட்டத்தின் முனைகளானால் தன்னேரில்லாத குறுக்கடி இல்லை. அம்முனைகளைச் சேர்க்கும் எல்லாப் பெருவட்டங்களுமே குறுக்கடிகள் ஆகும்.

குறிப்பு : யூக்லிடின் வெளியில் செவ்வக தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக் கொண்டால் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன. எனவே குறுக்கடிகள் $\frac{d^2x^l}{ds^2}=0$ என்னும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றன.

சமன்பாட்டைத் தீர்க்க,

$x^l = A^l s + B^l$ கிடைக்கிறது

இங்கே A^l, B^l என்பன மாறிலிகள். எனவே குறுக்கடிகள் நேர்கோடுகள் ஆகும்.

78. இல்லாநிலைக் குறுக்கடிகள் (Null-geodesics)

இல்லாநிலைத் தன்மையற்ற வளைவின் எந்தப் பகுதியிலும்

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^j}{ds}=e$$

s ப் பொருத்து வகையிட,

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)=\frac{\delta}{\delta s}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)=2\,g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^j}{ds}\right)$$

ஆனால் குறுக்கடிகளுக்கு $\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^j}{ds}\right)=0$

எனவே ஒரு குறுக்கடியின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும்

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^j}{ds}\right)=0$$

எனவே e என்னும் சுட்டி ஒரு குறுக்கடியினூடே திடீரென மாறமுடியாது. எனவே வளைவின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டு வெக்டர் இல்லாநிலை வெக்டராக இல்லா திருந்தால், அது குறுக்கடியின் எந்த ஒரு புள்ளியிலும் இல்லா நிலைத்தன்மை பெறமுடியாது. மாறாக, ஆரம்பத்திசை இல்லா நிலைத் தன்மையுடையதாக இருப்பின் வளைவு இல்லாநிலை பெறும். இப்போது வில்தூரத்தை ஒட்டளவாகக் கொள்ள இயலாது.

எனவே

$$\frac{d^2x^l}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \qquad \text{......(78.1)}$$

என்னும் சமன்பாடுகளின் தீர்வான இல்லாநிலை வளைவு $x^l = x^l(t)$-ஐ ஓர் இல்லாநிலைக் குறுக்கடி (null-geodesic) என்கிறோம்.

குறிப்பு: V_4 ல் $(ds)^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + C^2 (dx^4)^2$ என்பதை அளவையுருவாகக் கொண்டால் $\dfrac{d^2x^l}{dt^2} = 0$ என்பன இல்லாநிலைக் குறுக்கடிகளின் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

அடுத்து, $x^1 = C\int r \cos\theta \cos\psi \, dr$

$$x^2 = C\int r \cos\theta \sin\psi \, dr$$

$$x^3 = C\int r \sin\theta \, dr, \quad x^4 = \int r dt$$

என்பது ஓர் இல்லாநிலை வளைவு. ஆயினும் r, θ, ψ இவை மாறிலிகளாக இருந்தாலன்றி, மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்வதில்லை. எனவே ஒவ்வோர் இல்லாநிலை வளைவும் இல்லாநிலைக் குறுக்கடியாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. 78.1-ன் தீர்வாக அமையும் இல்லாநிலை வளைவுகளே, இல்லாநிலைக் குறுக்கடிகள் ஆகும்.

79. சிறப்பு இலக்கெண் அமைப்புகள் (Special Coordinate Systems)

எந்தவோர் இலக்கெண் அமைப்பிற்கும் கட்டுப்படாத, குறியீட்டு அமைப்பு பண்புருக் கணிதத்தின் தனிச்சிறப்பு ஆகும். எனவே பண்புருக் கணிதத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட இலக்கெண் அமைப்பை மட்டுமே எடுத்துக்கொண்டு நாம் செயலாற்றுவதில்லை. இருந்தபோதிலும் சில சமயங்களில் சில குறிப்பிட்ட சிறப்பு இலக்கெண் அமைப்புகள் பயனுடையவைகளாக உள்ளன. அவற்றைப் பயன்படுத்திச் சிக்கல்களுக்குத் தீர்வு காண்பது எளிதாக உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டாக, முப்பரிமாண வெளியில் மிகப் பொது வான வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்புகளுக்கும் பொருந்து மாறு பண்புரு விதிகளை இயற்றினோம். ஆனால் பல சமயங்களில் தெக்காட்டின் செவ்வக இலக்கெண் அமைப்பில் கணக்கிடுவது நமக்கு எளிதாக உள்ளது.

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து ரீமான் வெளி V_Nல் தெக்காட்டின் செவ்வக அமைப்பைப் போன்று எளிதான அமைப்பு வேறொன்று மில்லை எனலாம். இது தவிர குறிப்பிட்ட சில எளிய இயல்புகளை உடைய அமைப்புகள் சில உள்ளன. அத்தகைய சிறப்பு இலக்கெண் அமைப்புகளில் சிலவற்றைக் காண்போம்.

1. குறுக்கடி இலக்கெண்கள் (Geodesic Coordinates)

ஒரு வெளியில் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் அனைத்தும் பூச்சியங்கள் ஆக இருக்குமாறு செய்யும் ஓர் இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக்கொள்ள இயலும் என்று காட்டுவோம்.

x^i என்பது ஒரு பொது இலக்கெண் அமைப்பு என்க. P_0 என்னும் குறிப்பிட்ட புள்ளியின் இலக்கெண்கள் $\underset{(o)}{x}^{i}$ என்க.

$\bar{x}^i$ என்னும் புது இலக்கெண் அமைப்பு கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு களால் கொடுக்கப்படட்டும்

$$\bar{x}^i = x^i - \underset{(o)}{x}^{i} + \frac{1}{2}\left\{ {i \atop mn} \right\}_{(o)} \left(x^m - \underset{(o)}{x}^{m}\right)\left(x^n - \underset{(o)}{x}^{n}\right) \quad \ldots\ldots(79.1)$$

ஓர் உருப்படியுடன் (0) என்னும் பிற்குறி சேர்க்கப்பட்டால் P_0ல் அந்த உருப்படியின் மதிப்பைக் குறிக்கிறது. 0 க்கு போடப் பட்டுள்ள அடைப்புக் குறிகள் அந்தச் சுட்டிணைப்பிற்கு பண்புருத் தன்மை இல்லை என்பதைக் குறிக்கிறது. அதனால் அது கூட்டல் மரபுக்குக் கட்டுப்படாது.

x^i ஐப் பொருத்து 79.1 ஐ வகையிட

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta^i_j + \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} \left(\left(x^n - \underset{(0)}{x}^{n}\right)\right) \quad \ldots\ldots(79.2)$$

எனவே $\left(\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{(0)} = \delta^i_j$

$\therefore \quad \left| \left(\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right) \right| \neq 0$ அதாவது P_0 ல் யாக்கோபின் அணிக் கோவை பூச்சியமன்று. எனவே 79.1 என்னும் இலக்கெண் நிலை மாற்றம் P_0 க்கு நெருக்கமான பகுதியில் ஏற்றுக்கொள்ளத் தக்கது ஆகும்.

79.2 ஐ $\dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$ ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$\delta^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} \left(x^n - x^n_{(0)} \right) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$$

$\bar{x}^h$ ஐப் பொருத்து வகையிட

$$O = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} + \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$$

$$+ \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} \left(x^n - x^n_{(0)} \right) \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} \qquad \ldots\ldots(79.3)$$

எனவே P_0 ல்,

79.2 லிருந்து $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \right)_{(0)} = \delta^i_k$

79.3 லிருந்து $\left(\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} \right) = - \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} \delta^n_h \, \delta^j_k = - \left\{ {i \atop kh} \right\}_{(0)}$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} \right)_{(0)} = - \left\{ {i \atop kh} \right\}_{(0)} \qquad \ldots\ldots(79.4)$$

அடுத்து, கிறித்தஃபல் குறியீட்டின் மாற்றுரு விதிப்படி

$$\left\{ {l \atop i\,j} \right\} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial \bar{x}^s} \left\{ {s \atop pq} \right\}_0 + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^p}$$

எனவே P_0 ல்

$$\left\{ {l \atop ij} \right\} = \delta^p_i \; \delta^q_j \; \delta^l_s \left\{ {s \atop pq} \right\}_{(0)} - \left\{ {p \atop ij} \right\} \delta^l_p \qquad \text{(79.4ன் படி)}$$

$$= \left\{ {l \atop ij} \right\}_{(0)} - \left\{ {l \atop ij} \right\}_{(0)}$$

$$= 0. \qquad \ldots\ldots(79.5)$$

எனவே P_0 என்னும் புள்ளியில் $\bar{x}^i$ இலக்கெண் அமைப்பில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன. இந்த $\bar{x}^i$ இலக்கெண்களை P_0 என்னும் புள்ளியின் குறுக்கடி இலக்கெண்கள் (Geodesic Coordinates) அல்லது ஓரிடத்திய தெக்காட்டின் இலக் கெண்கள் (Local Cartesian Coordinates) என்கிறோம். P_0 ஐ குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பின் துருவம் (Pole) என்கிறோம். அதாவது ஒரு புள்ளியில் ஏதாவது ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்களானால் அந்த அமைப்பு அந்தப் புள்ளியில் ஏற்படுத்தப்படும் குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பு ஆகும். இவ்வாறான குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பை உருவாக்க 79.1ல் கொடுக்கப்பட்ட நிலைமாற்றம் ஒரு வழியாகும். இதன்றி வேறு பல முறைகளிலும் குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்புகளைத் தோற்றுவிக்கலாம். எப்படியும் அவ்வாறு ஓர் அமைப்பாவது உள்ளது என நிரூபித்துள்ளோம்.

அடுத்து $\bar{x}^i_{(0)} = 0$ எனவே புதிய குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பிற்கு துருவம்தான் ஆதியாக அமைகிறது.

2. ரீமானின் இலக்கெண்கள் (Riemannian Coordinates)

ஒருவகைச் சிறப்பு குறுக்கடி இலக்கெண்களுக்கு ரீமானின் இலக் கெண்கள் என்று பெயர்.

$x^i = x^i\ (s)$ என்பது P_0 வழியே செல்லும் குறுக்கடியாக இருக்கட்டும்.

p^i என்பது P_0ல் உள்ள அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் என்க.

$$\text{அதாவது}\quad p^i = \left(\frac{dx^i}{as}\right)_{P_0} \qquad \ldots\ldots(79.6)$$

s என்பது குறுக்கடியின் வில்தூரம் எனின்,

$$\bar{x}^i = p^i s \qquad \ldots\ldots(79.7)$$

என புதிய இலக்கெண் அமைப்பை வரையறை செய்வோம்.

ஒவ்வொரு p^iக்கும் P_0 வழியே செல்லும் ஒரு குறுக்கடி உறுதி செய்யப்படுகிறது, s இந்தக் குறுக்கடியின் மீது ஒரு புள்ளியை உறுதி செய்கிறது. எனவே P_0 ஐ நெருங்கியுள்ள பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் 79·6ல் கொடுக்கப்படும் $\bar{x}^i$ என்னும் இலக் கெண்கள் உண்டு.

இந்தப் புதிய இலக்கெண் அமைப்பு $\bar{x}^i$ல் குறுக்கடிகளின் சமன் பாடுகள்

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} = \overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}} \frac{d\bar{x}^j}{ds} \frac{d\bar{x}^k}{ds} = 0 \qquad \text{......(79.8)}$$ ஆகும்

ஆனால் 79.7 லிருந்து $\frac{d\bar{x}^i}{ds} = p^i, \quad \frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} = 0$

79.8ல் பிரதியிட $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} p^j p^k = 0$

இது P_0 உள்ள திசைகள் அனைத்திற்கும் அதாவது P^i கள் அனைத்திற்கும் பொருந்தும். ஆதலால்

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}} + \overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}} = 2 \overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}} = 0$$

எனவே $\bar{x}^i$ என்பன குறுக்கடி இலக்கெண்கள்.

79.7 ஆல், அதாவது $\bar{x}^i = p^i s$ ஆல் வரையறை செய்யப்படும் இலக்கெண்கள் **ரீமானின் இலக்கெண்கள்** எனப்படும்.

குறிப்பு 1 : குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பு ஒன்றின் ஆதியில் $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = 0$

எனவே $[jk, m] = g_{im} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = 0$

மேலும் $\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} = [jk, m] + [mk, j] = 0$

எனவே துருவத்தில் அல்லது ஆதியில் இருவகை கிறித்தஃபல் குறியீடுகளும், அளவைப் பண்புருவின் முதல் அடைவுப் பகுதி வகைக்கெழுக்களும் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன.

குறிப்பு 2: குறிப்பு 1 ல் எடுத்துச் சொல்லப்பட்ட இயல்பு குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பின் முக்கியமான இயல்பு ஆகும். இதனால் துருவத்தில் உடன்மாறி வகைக்கெழு சாதாரண வகைக் கெழுவாகவும் எளிய உருவத்தில் அமைகின்றன.

சில சமயங்களில் ஒரு பண்புருச் சமன்பாட்டை அமைப்பதற்கு கடுமையான இயற்கணிதச் செயல்களை கையாள நேரலாம். அச்சமயங்களில் குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பிற்கு மாற்றி அச் சமன்பாட்டை துருவத்தில் நிரூபிப்பது மிக எளிதாக அமையும். மேலும் பண்புரு கணிதத்தில் "ஒரு பண்புரு ஒரு புள்ளியில் ஏதோ வொரு இலக்கெண் அமைப்பில் பூச்சியமானால், அது ஒவ்வொரு இலக்கெண் அமைப்பிலும் பூச்சியமாகிறது" என்பது அடிப்படைத் தேற்றம். எனவே ஒரு பண்புருச் சமன்பாடு ஒரு புள்ளியில் ஏதோ வொரு இலக்கெண் அமைப்பில் நிரூபிக்கப்பட்டால் அது ஒவ்வொரு இலக்கெண் அமைப்பிலும் நிரூபிக்கப்பட்டதாகிறது. எனவே குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பில் அதை எளிதாக நிரூபித்து அதை இலக்கெண் அமைப்புகள் அனைத்திற்கும் பொது வாக்கலாம். ஆனால் இம்முறையைப் பயன்படுத்து முன் கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாட்டின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் பண்புரு என்பதை உறுதி செய்துகொள்வது அவசியம்.

இம்முறை செயல்படுவதை ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் காணலாம்.

$$(A_{ij}\, B^j)_{,m} = A_{ij,\, m}\; B^j + A_{ij}\; B^j_{\;,m} \qquad \ldots\ldots(79.9)$$

என்பது உடன்மாறி வகைக்கெழுவின் பெருக்கல் விதி. இதை நிரூபிப்போம்.

$$(A_{ij}\, B^j)_{,m} - A_{ij,\, m}\; B^j - A_{ij}\; B^j_{\;,m} \qquad \ldots\ldots(79.10)$$

என்னும் பண்புருவை எடுத்துக்கொள்வோம்.

P_0 என்பது யாதாமொரு புள்ளியாக இருக்கட்டும். அதைத் துருவமாகக் கொண்ட ஒரு குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக்கொள்வோம். அந்த அமைப்பில் உடன்மாறி வகைக்கெழுக்கள் நமக்குப் பழக்கமான பகுதி வகைக்கெழுக்கள் ஆகின்றன.

எனவே $(A_{ij}\, B^j_{\;,m} = \dfrac{\partial\, A_{ij}\, B^j}{\partial x_m}, \; A_{ij,\, m} = \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x^m}$

$$B^j_{\;,m} = \frac{\partial B^j}{\partial x^m}\,,$$

பகுதி வகைக்கெழுக்கள் பெருக்கல் விதிக்குக் கட்டுப்பட்டவை என்பது தெரிந்ததே.

அதாவது $\dfrac{\partial (A_{ij} B^j)}{\partial x^m} = B^j \dfrac{\partial (A_{ij})}{\partial x^m} + A_{ij} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^m}$

எனவே P_0 என்னும் துருவத்தில் 79.10 ல் உள்ள பண்புரு குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பில் பூச்சியமாகிறது. எனவே ஒவ்வொரு இலக்கெண் அமைப்பிலும் பூச்சியமாகும்.

ஆனால் P_0 என்பது யாதாமொரு புள்ளி; குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியன்று. V_N வெளியில் உள்ள எந்தப் புள்ளியையும் P_0 ஆகக் கொள்ளலாம். எனவே V_N ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் 79.10 ல் உள்ள பண்புரு பூச்சியமாகிறது.

எனவே சமன்பாடு 79.9, V_N ல் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் உண்மை.

குறிப்பு 3: ஒரு குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பில், அதாவது ஒரோரிடத்திய தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பில், P_0 என்னும் அதன் துருவத்தில் $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ என முன்னரே கண்டோம். எனவே அப்புள்ளியில் g_{ij} என்னும் அளவைப் பண்புருவின் கூறுகள் மாறிலிகள்.

அடுத்து P_0 ல்

$(ds)^2 = g_{ij}\ dx^i\ dx^j$ என்னும் கோட்டுமூலத்தை எடுத்துக் கொள்க.

$$\text{இங்கு } G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \cdots\cdots g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} \cdots\cdots g_{2N} \\ g_{31} & g_{32} \cdots\cdots g_{3N} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{N1} & g_{N2} \cdots\cdots g_{NN} \end{bmatrix}$$

$$dx = \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx^N \end{bmatrix} \quad (dx)^T = [dx^1,\ dx^2, \ldots\ldots dx^N]$$

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

இங்கு $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, என்பன $+1$ அல்லது—1 ஆகும்.

$$dy = \begin{bmatrix} dy^1 \\ dy^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dy^N \end{bmatrix} \qquad (dy)^T = [dy^1, dy^2, \ldots\ldots\ldots dy^N]$$

என்னும் அணிக்கணிதக் குறியீடுகளை ஏற்றுக்கொள்வோம். எனவே கோட்டுமூலத்தை $(ds)^2 = (dx)^T\ G\cdot(dx)$ என்று எழுதலாம்.

இதை $dx = Pdy$ என்னும் நேர்கோட்டிய நிலைமாற்றம் கோட்டு மூலம் $(ds)^2 = (dy)^T\ E(dy)$ என்னும் உருவை ஏற்குமாறு செய்யும் என்பதை அணிக்கணிதக் கொள்கைகளிலிருந்து (Theory of Matrices) நாம் அறிந்துள்ளோம். எனவே ஓரிடத்தில் தெக் காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பில் P_0 என்னும் துருவத்தில் கோட்டுமூலம்.

$$(ds)^2 = \varepsilon_1(dy^1)^2 + \varepsilon_2(dy^2)^2 + \ldots\ldots\ldots + \varepsilon_N(dy^N)^2$$

என்னும் உருவை ஏற்கிறது.

80. மாதிரிக் கணக்கு

கணக்கு 1: $(ds)^2 = (dx^1)^2 + [(x^1)^2 + C^2]\ (dx^2)^2$ என்னும் கோட்டு மூலத்தை உடைய ஒரு வெளியில் நாம் வாழ்வதாகக் கொண்டு அதன் குறுக்கடிகளின் வகையூட்டுச் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$(ds)^2 = (dx^1)^2 + [(x^1)^2 + c^2]\ (dx^2)^2$ என்பது கொடுக்கப் பட்ட கோட்டு மூலம்

$$\therefore g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

எனவே

$$g^{ij}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(x^1)^2+c^2} \end{bmatrix}$$

ஆகவே

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = 0 \qquad \left\{ {2 \atop 11} \right\} = 0$$

$$\left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = 0 \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{x^1}{(x^1)^2+c^2}$$

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -x^1 \qquad \left\{ {2 \atop 22} \right\} = 0$$

எனவே குறுக்கடியின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளாவன

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} - x^1\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \frac{2x^1}{(x^1)^2+c^2}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0$$

கணக்கு 2 : ஒரு யூக்லிடின் முப்பரிமாண வெளியில், துருவ கோள இல்க்கெண்களில் குறுக்கடிகளின் சமன்பாடுகளை அமைக்கவும்

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi$$

$$(ds)^2 = (d_r)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\phi)^2$$

$$\therefore g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

பூச்சியமாகாத கிறித்தஃபல் குறியீடுகளாவன

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -\gamma\,; \left\{ {1 \atop 33} \right\} = -\gamma\sin^2\theta$$

$$\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{\gamma}\,; \left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\left\{ {3 \atop 13} \right\} = \left\{ {3 \atop 31} \right\} = \frac{1}{\gamma}\,; \left\{ {3 \atop 32} \right\} = \left\{ {3 \atop 23} \right\} = \cot\theta$$

குறுக்கடியின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளாவன

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

மதிப்புகளைப் பிரதியிட குறுக்கடியின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} - \gamma \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \gamma \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{2}{\gamma} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta \cos\theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = \frac{2}{\gamma} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} + 2\cot\theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0$$

பயிற்சி

1. ஒரு வெளியின் கோட்டு மூலம் $(ds)^2 = (dx^1)^2 + (\sin x^1)^2 (dx^2)^2$ எனில் குறுக்கடியின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2. $(ds)^2 = (dx^1)^2 + [(x^2)^2 - (x^1)^2] (dx^2)^2$ என்னும் அளவை உருவிற்கு இரண்டாம் வகை கிறித்தஃபல் குறியீடுகளைக் கணக்கிடுக. பின்பு, குறுக்கடியின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

3. $x^1 = u^1 \cos u^2$
$x^2 = u^1 \sin u^2$
$x^3 = 0$

என்னும் சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்குக் கிறித்தஃபல் குறியீடுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும். குறுக்கடியின் சமன்பாடுகளை எழுதவும்.

9. கோட்டப் பண்புரு
(The Curvature Tensor)

81. ஒரு வெளியின் கோட்டம் (The Curvature of a Space)

யூக்லிடின் வரை கணிதத்தில் ஒரு வளைவின் அல்லது தளத்தின் வளைவுத்தன்மை அல்லது கோட்டம் (curvature) நமக்குப் பழக்கமான எளிய கருத்து ஆகும். ஒரு வளைவு, கோட்டமுடையதாக இருந்தால் அது நேர்கோட்டிலிருந்து விலகிச் செல்கிறது. ஒரு தளம், கோட்டமுடையதாக இருந்தால் அது சமதளத்திலிருந்து விலகிச் செல்கிறது. இங்கு ஒரு வளைவு கோட்டின் கோட்டத்தை நேர் கோட்டுடன் ஒப்பிட்டும் தளத்தின் கோட்டத்தை சம தளத்துடன் ஒப்பிட்டு அறிகிறோம். இந்த ஒரு பரிமாண, இரு பரிமாண வெளிகளில் கோட்டமில்லாத உருப்படிகள் தெரிந்துள்ளதால் அவற்றுடன் ஒப்பிட்டு கோட்டமுள்ளவற்றைத் தீர்மானிக்கிறோம். இம்முறையை 3 ம் அதற்குமேலும் உள்ள பரிமாண வெளிகளுக்கு நீட்டி அந்த வெளிகளின் "கோட்டத்தை" வரையறை செய்வதில் ஒரு சிக்கல் எழுகிறது. அவ்வெளிகள் கோட்டமில்லா உருப்படிகளின் தன்மைகள் தெரிந்திருந்தால்தான் மேற்கண்ட ஒப்பீட்டு முறையைக் கையாளலாம். ஆனால் நமக்கு அவ்வெளிகளில் கோட்டமில்லா உருப்படிகள் பற்றித் தெரியாது. எனவே இந்த முறையை நீட்டி வரையறை வகுக்க முடியாது. எனவே ஒரு வெளியின் கோட்டத்தை அதன் உள்ளார்ந்த அதாவது தன்னியல்பான தன்மைகளைக் கொண்டே வரையறை செய்ய வேண்டும்.

ஒரு சமதளத்தில் அதாவது ஒரு 'தட்டை' (flat) யான தளத்தில் தெக்காட்டின் செவ்வக இலக்கெண்களில் அளவை உரு,

$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2$ என்பது தெரிந்ததே. இது தட்டையான தளத்தின் உள்ளார்ந்த தன்மை. இதனையே நீட்டி தட்டை வெளியினை வரையறை செய்கிறோம்.

வரையறை: ஒரு N பரிமாண ரீமான் வெளி V_N ல் ஏதாவது ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில், ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அளவை உரு

$$(ds)^2 = \varepsilon_1 (dx^1)^2 + \varepsilon_2 (dx^2)^2 + \ldots\ldots + \varepsilon_N (dx^N)^2 \qquad \ldots\ldots(81.1)$$

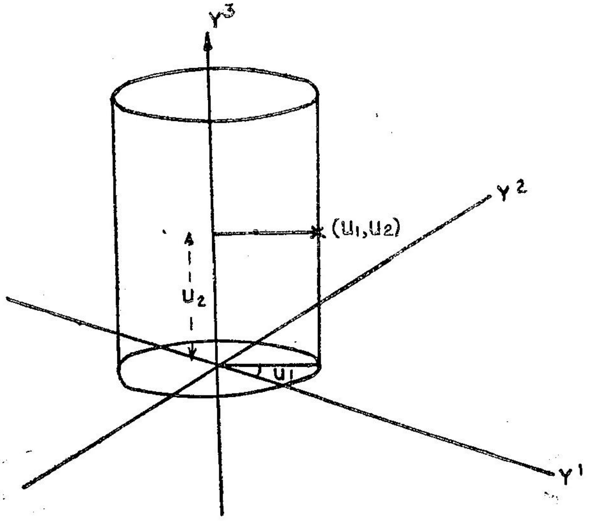
என அமையுமானுல் அந்த வெளியைத் தட்டை வெளி (flat space) என்கிறோம். இங்கு ε க்கள் சுட்டிகள் அவற்றின் மதிப்பு $+1$ அல்லது-1 ஆகும்

தட்டையானதாக இல்லாத வெளியைக் கோட்டமுடையது என்கிறோம்.

குறிப்பு 1: இந்த வரையறையில் ஒரு குறிப்பிட்ட இலக்கெண் அமைப்பில் "ஒவ்வொரு" புள்ளியிலும் அளவை உரு 81.1 போன்று அமைய வேண்டுவது அவசியம். ஏனெனில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் மட்டும் அம்மாதிரி அளவை உரு இருக்க முடியும் என்பதை ஓரிடத்தில் தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பில் கண்டோம்.

குறிப்பு 2: மேற்கூறிய வரையறையின்படி யூக்லிடின் வெளி தட்டையானது. ஏனெனில் யூக்லிடின் வெளியில் $(ds)^2 = dy^i\, dy^i$ ஆகும்.

குறிப்பு 3: மேற்கூறிய வரையறையின்படி சாதாரண உருளை யின் தளம் தட்டையானது. ஏனெனில் அளவை உரு தேவையான தோற்றத்தில் அமையும்படி ஓர் இலக்கெண் அமைப்பை இத்தளம் ஏற்றுக் கொள்கிறது.



a என்பது உருளையின் ஆரம் என்க. உருளையின் சமச்சீர் Y^3 அச்சாகக் கொள்க. உருளையின் தளத்தில் அமைந்த புள்ளியின் இலக்கெண்கள் (u_1, u_2) என்று கொண்டால் அவை $y_1 = a \cos u^1$, $y^2 = a \sin u^1$, $y^3 = u^2$ ஆல் கொடுக்கப்படுகின்றன.

$$\text{எனவே } (ds)^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$$

$$= a^2 (du^1)^2 + (du^2)^2$$

$$v^1 = au^1, \; v^2 = u^2 \text{ என மாற்றினால்}$$

$$(ds)^2 = (dv^1)^2 + (dv^2)^2$$

∴ உருளையின் தளம் தட்டை. எனவே 'தட்டை' என்னும் சொல் ரீமான் வெளியில் புதுப்பொருளில் வரையறை செய்யப் பட்டுள்ளதை உணர வேண்டும்.

82. ரீமான்-கிறித்தஃபல் பண்புரு

அடுத்து, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெளி, தட்டையானதா அல்லது கோட்டமுடையதா எனக் கண்டறிய ஒரு சோதனையை உருவாக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட வெளியென்றால் அதன் அளவை உரு

$$ds^2 = g_{mn} \, dx^m \, dx^n$$

கொடுக்கப்பட்டது என்பதே பொருள். எனவே இந்த அளவை உருவை 81.1ல் உள்ள தோற்றத்திற்கு மாற்றக்கூடிய ஓர் இலக்கெண் நிலைமாற்றம் உள்ளதா என அறிய ஒரு சோதனை வேண்டும்.

இதற்கு A_i என்னும் யாதாமொரு வெக்டரின் உடன் மாறி வகைக்கெழுவிலிருந்து தொடங்குகிறோம்.

$$A_{i,\,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \left\{ \frac{p}{ij} \right\} A_p.$$

இது ஒரு பண்புருவாதலால் இதை மறுபடியும் உடன்மாறி வகையிட முடியும். வகையிட்டால் A_iன் இரண்டாம் அடைவு உடன்மாறி வகைக்கெழு கிடைக்கிறது. இதுவும் ஒரு பண்புரு.

$$A_{i,\,jk} = - \left\{ {p \atop ik} \right\} A_{p,\,j} - \left\{ {p \atop jk} \right\} A_{l,\,p}.$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \left\{ {p \atop ij} \right\} A_p \right] - \left\{ {p \atop ik} \right\} \left[\frac{\partial A_p}{\partial x^j} - \left\{ {q \atop pj} \right\} A_q \right]$$

$$- \left\{ {p \atop jk} \right\} \left[\frac{\partial A_i}{\partial x^p} - \left\{ {r \atop ip} \right\} A_r \right]$$

$$A_{i,\,jk}=\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^j}-\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix}p\\ ij\end{Bmatrix}A_p-\begin{Bmatrix}p\\ ij\end{Bmatrix}\frac{\partial A_p}{\partial x^k}-\begin{Bmatrix}p\\ ik\end{Bmatrix}\frac{\partial A_p}{\partial x^j}$$
$$+\begin{Bmatrix}p\\ ik\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\ pj\end{Bmatrix}A_q-\begin{Bmatrix}p\\ jk\end{Bmatrix}\frac{\partial A_i}{\partial x^p}+\begin{Bmatrix}p\\ jk\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r\\ ip\end{Bmatrix}A_r \quad \ldots\ldots(82.1)$$

j, k என்ற சுட்டிணைப்புகளை இடமாற்றி அமைக்க

$$A_{i\,,kj}=\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k}-\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix}p\\ ik\end{Bmatrix}A_p-\begin{Bmatrix}p\\ ik\end{Bmatrix}\frac{\partial A_p}{\partial x^j}-\begin{Bmatrix}p\\ ij\end{Bmatrix}\frac{\partial A_p}{\partial x^k}$$
$$+\begin{Bmatrix}p\\ ij\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\ pk\end{Bmatrix}A_q-\begin{Bmatrix}p\\ kj\end{Bmatrix}\frac{\partial A_i}{\partial x^p}+\begin{Bmatrix}p\\ kj\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}r\\ ip\end{Bmatrix}A_r \quad \ldots\ldots(82.2)$$

இனி 82.1—82.2

$$A_{i,\,jk}-A_{i,\,kj}=-\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix}p\\ ij\end{Bmatrix}A_p+\begin{Bmatrix}p\\ ik\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\ pj\end{Bmatrix}A_q$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix}p\\ ik\end{Bmatrix}A_p-\begin{Bmatrix}p\\ ij\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\ pk\end{Bmatrix}A_q$$

இரண்டாவது, நான்காவது உறுப்புகளில் போலிச் சுட்டிணைப்புகள் p, q இவற்றை இடமாற்றி அமைக்க

$$A_{i,\,jk}-A_{i,\,kj}=\Bigg[\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{Bmatrix}p\\ ik\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix}p\\ ij\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{Bmatrix}q\\ ik\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}p\\ qj\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}q\\ ij\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}p\\ qk\end{Bmatrix}A^j \quad \ldots\ldots(82.3)$$

A_i என்பது யாதாமொரு முதல் தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புரு $A_{i,\,jk}-A_{i,\,kj}$ என்பது மூன்றும் தகுநிலை உடன்மாறிப் பண்புரு. எனவே 82.3 ல் ஈவுவிதியைப் பயன்படுத்தினல் அடைப்புக்குள் உள்ள கோவை முரண்மாறி அடைவு ஒன்றும், உடன்மாறி அடைவு மூன்றும் உள்ள ஒரு கலப்புப் பண்புரு என்பது தெளிவு. இதை $R^p_{\cdot ijk}$ ஆல் குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே,

$$R^p_{\cdot ijk}=\Bigg[\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix}p\\ ik\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix}p\\ ij\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{Bmatrix}q\\ ik\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}p\\ qj\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}q\\ ij\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}p\\ qk\end{Bmatrix}\Bigg] \quad \ldots\ldots(82.4)$$

அதாவது

$$R^{p}_{\ .ijk} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^j} & \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \left\{ {p \atop ij} \right\} & \left\{ {p \atop ik} \right\} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left\{ {p \atop qj} \right\} & \left\{ {p \atop qk} \right\} \\ \left\{ {q \atop ij} \right\} & \left\{ {q \atop ik} \right\} \end{vmatrix}$$

$$\therefore A_{i,\,jk} - A_{i,\,kj} = R^{p}_{\ ,ijk}\, A_p \qquad \ldots\ldots(82.5)$$

$R^{p}_{\ ,ijk}$ ஐ கலப்பு ரீமான் கிறித்தஃபல் பண்புரு அல்லது கலப்புக் கோட்டப் பண்புரு என்கிறோம். இது இரண்டாம் வகை ரீமான்-கிறித்தஃபல் பண்புரு என்றும் சொல்லப்படும். இது g_{ij} என்னும் அடிப்படைப் பண் புருக்களின் வகைக் கெழுக்களால் மட்டுமே அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது முதலில் எடுத்துக் கொண்ட பண்புரு A_i ஐச் சார்ந்த தன்று. எந்த ஒரு உடன் மாறி வெக்டரை முதலில் எடுத்துக் கொண்டாலும் $R^{p}_{\ ,ijk}$ ன் உரு ஒன்றே.

அடுத்து வெளியானது தட்டையானது எனின் ஏதோவொரு இலக்கெண் அமைப்பில் அதன் அளவை உரு

$$(ds)^2 = \varepsilon\,(dx^1)^2 + \varepsilon_2\,(dx^2)^2 + \ldots\ldots\ldots + \varepsilon^N\,(dx^N)^2$$

என்றிருக்க வேண்டும். அவ்வமைப்பில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியமாகின்றன. எனவே $R^{p}_{\ ,ijk}$ ன் எல்லாக் கூறுகளுமே மறைகின்றன.

எனவே $R^{p}_{\ ,ijk} = 0$ என்பன வெளி "தட்டை" யாக இருப்பதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடுகள்.

அடுத்து $R^{p}_{\ ,ijk} = 0$ போதுமானவை என நிரூபிப்போம்.

$R^{p}_{\ ,ijk} = 0$ ஆனால் 82.5 ன் படி

$$A_{i,\,jk} - A_{i,\,kj} = 0$$

அதாவது $A_{i,\,jk}=A_{i,\,kj}$ ஆனுல் ஒரு தெக்காட்டின் அமைப்பில் $A_{i,\,jk}=\dfrac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^j}=\dfrac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k}=A_{i,\,kj}$ என நமக்குத் தெரியும். எனவே $R^{p}_{\;,ijk}=0$ ஆக இருக்கும்போது வெளி ஒரு தெக்காட்டின் அமைப்பை ஏற்றுக் கொள்கிறது. எனவே அதன் அளவை உரு 81.1 ன் அமைப்பில் அமையும். எனவே வெளி தட்டையானது

ஆக $R^{p}_{\;,ijk}=0$ என்பன வெளி 'தட்டை' யாக இருப்பதற்குத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடுகள் ஆகும்.

குறிப்பு 1 : $R^{p}_{\;,ijk}$ என்னும் கலப்புக் கோட்டப் பண்புரு, பண்புருவின் பயன்பாடுகளில் சிறப்பிடம் பெற்றுள்ளதால் அதன் சூத்திரத்தை நினைவில் வைத்துக்கொள்வது நல்லது. அதை நினைவிலிருத்த இக்குறிப்பு உதவும்.—(82.4)ல் வலது பக்கத்தில் முதல் உறுப்பு இரண்டாவது சுட்டிணைப்பைப்பொருத்து வகையிடலுடன் ஆரம்பிக்கிறது. அதைப் பெருக்கும் கிறித்தஃபல், குறியீட்டில் மற்ற சுட்டிணைப்புகள் அதனதன் மட்டத்திலேயே உள்ளன. எனவே முதலுறுப்பை நினைவில் கொள்வது எளிது. இரண்டாவது உறுப்பை எழுத j, k இவற்றை இடபரிமாற்றம் செய்யவும். மூன்ருவது உறுப்பில் உள்ள முதல் கிறித்தஃபல் குறியிடு முதல் உறுப்பிலுள்ள கிறித்தஃபல் குறியீட்டில் pக்கு பதிலாக q எழுதினுல் கிடைப்பது மூன்ருவது உறுப்பிலுள்ள இரண்டாவது கிறித்தஃபல் குறியீடு மற்ற சுட்டிணைப்புகளை அதனதன் மட்டத்தில் எழுதி, மிகுந்துள்ள, கீழ்க்குறியில் qவை எழுதினுல் கிடைப்பது. நான்காவது உறுப்பு மூன்ருவது உறுப்பில் j, k-களை இடமாற்றக் கிடைப்பது. எனவே $R^{p}_{\;,ijk}$ ன் நான்கு உறுப்புகளையும் நினைவில் கொள்வது எளிது.

குறிப்பு 2 : $A_{l,\,jk}-A_{l,\,kj}=R^{p}_{\;\cdot ijk}A_p$

எனவே உடன்மாறி வகையிடல் இயற்கணித மாற்று விதிக்குப் பொதுவாகக் கட்டுப்படுவதில்லை. எனவே $R^{p}_{\;\cdot ijk}=0$ என்பன உடன்மாறி வகையிடல் மாற்று விதிக்குக் கட்டுப்படத் தேவையும், போதுமான கட்டுப்பாடுகள்.

குறிப்பு 3 : $A^{i}{}_{,\,jk}-A^{i}{}_{,\,kj}=-R^{i}_{\;\cdot pjk}A^p$ என நிரூபிக்கலாம்.

83. உடன்மாறிக் கோட்டப் பண்புரு (Covariant Curvature tensor).

வழக்கமான முறையில் $R^{p}_{\cdot\, ijk}$ ல் குறியிறக்கம் செய்தால் R_{rijk} என்னும் புதிய பண்புரு கிடைக்கிறது.

அதாவது $R_{rijk} = g_{rp}\, R^{p}_{\cdot\, ijk}$ ......(83.1)

R_{rijk}-ஐ உடன்மாறிக் கோட்டப் பண்புரு அல்லது 'முதல்வகை ரீமான்-கிறித்தஃபல் பண்புரு என்கிறோம்.

$R_{rijk} = g_{rp}\, R^{p}_{\cdot\, ijk}$ ல் $R^{p}_{\cdot\, ijk}$-க்கு பிரதியிட

$$R_{rijk} = g_{rp}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q \\ ik \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p \\ qj \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q \\ ij \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p \\ qk \end{Bmatrix}\right] \quad \text{......(83.2)}$$

$$= g_{rp}\frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix} - g_{rp}\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q \\ ik \end{Bmatrix}[qj, r] - \begin{Bmatrix} q \\ ij \end{Bmatrix}[qk, r]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left[g_{rp}\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}\right] - \frac{\partial}{\partial x^k}\left[g_{rp}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}\right] - \begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^k}$$

$$+ \begin{Bmatrix} q \\ ik \end{Bmatrix}[qj, r] - \begin{Bmatrix} q \\ ij \end{Bmatrix}[qk, r]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}[ik, r] - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij, r] - \begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}[rj, p] - \begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}[pj, r]$$

$$+ \begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}[rk, p] + \begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}[pk, r] + \begin{Bmatrix} q \\ ik \end{Bmatrix}[qj, r] - \begin{Bmatrix} q \\ ij \end{Bmatrix}[qk, r]$$

$$\therefore R_{rijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}[ik, r] - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij, r] + \begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}[rk, p]$$

$$- \begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}[rj, p] \quad \text{......(83.3)}$$

மற்ற நான்கு உறுப்புகளில் போலிச் சுட்டிணைப்பு p ஐ q வாக மாற்ற நான்கின் கூட்டுத் தொகையும் பூச்சியமாகிறது.

அடுத்து

$$\frac{\partial}{\partial x^j}[ik, r] - \frac{\partial}{\partial x^k}[ij, r] = \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^r}\right)\right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^r} - \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial x^k \partial x^i}\right] \quad ......(83.4)$$

மேலும் $\left\{ {p \atop ij} \right\} [rk, p] - \left\{ {p \atop ik} \right\} [rj, p]$

$$= g^{ps}[ij, s][rk, p] - g^{ps}[ik, s][rj, p] \quad ......(83.5)$$

(83.4) (83.5) அவற்றை 83.3 ல் பயன்படுத்த

$$R_{rijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{rk}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^r \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{rj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^j}\right]$$

$$+ g^{ps}([ij, s][rk, p]\ [ik, s][rj, p]) \quad ......(83.6)$$

84. ரீமான்—கிறிஸ்தபெல் பண்புருக்களின் இயல்புகள்

இயல்பு 1: $R^p_{\cdot ijk}$ பின்னிரண்டு உடன்மாறிச் சுட்டிணைப்புகளில் எதிர்சீர் உடையது.

அதாவது $R^p_{\cdot ijk} = -R^p_{\cdot ikj}$ ......(84.1)

நிருபணம்: இது $R^p_{\cdot ijk}$ ன் வரையறையிலிருந்தே தெளிவு.

இயல்பு 2: $R^p_{\cdot ijk} + R^p_{\cdot jki} + R^p_{\cdot kij} = 0$ (84.2)

என்னும் சமன்பாட்டால் தரப்படும் வட்டச்சீர்மை $R^p_{\cdot ijk}$ க்கு உண்டு.

நிருபணம்: A_i எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளியில் ஆதியை எடுத்துக் கொள்ளவும். அந்தப் புள்ளியில் ஒரு குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக் கொள்ளவும். இவ்வமைப்பில்

கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் அந்தப் புள்ளியில் பூச்சியங்களாகின்றன. எனவே ஆதியில்

$$R^{p}_{\cdot ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}$$ என ஆகிறது.

எனவே

$$R^{p}_{\cdot jki} = \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ji \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^i}\begin{Bmatrix} p \\ jk \end{Bmatrix}$$

$$R^{p}_{\cdot kij} = \frac{\partial}{\partial x^i}\begin{Bmatrix} p \\ kj \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ki \end{Bmatrix}$$

இவற்றைக் கூட்ட

$$R^{p}_{\cdot ijk} + R^{p}_{\cdot jki} + R^{p}_{\cdot kij} = 0$$

இது குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பில் உண்மை. இது ஒரு பண்புருச் சமன்பாடு ஆதலால் ஆதியில் எல்லா இலக்கெண் அமைப்புகளிலும் உண்மை. மேலும் எந்தப் புள்ளியை வேண்டுமானாலும் ஆதியாக எடுத்துக் கொள்ளலாம் எனவே வெளியின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் உண்மை.

எனவே

$$R^{p}_{\cdot ijk} + R^{p}_{\cdot jki} + R^{p}_{\cdot kij} = 0 \qquad \ldots\ldots(84.2)$$

இயல்பு 3 : $R^{p}_{\cdot ijk}$ ன் $R^{p}_{\cdot pjk}$ என்னும் குறுக்கம் பூச்சியம் ஆகிறது.

நிருபணம் : வரையறையின்படி

$$R^{p}_{\cdot pjk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ pk \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ pj \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p \\ qj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ pk \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p \\ qk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ pj \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\log\sqrt{g_{pp}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\log\sqrt{g_{pp}}\right)$$

$$+ \begin{Bmatrix} p \\ qj \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ pk \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q \\ pk \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p \\ qj \end{Bmatrix}$$

[முதல் இரு உறுப்புகளில் உள்ள g_{pp} ல் கூட்டல் மரபு இல்லை. நான்காவது உறுப்பில் போலிச் சுட்டிணைப்புகள் மாற்றப் பட்டுள்ளன.]

$$\therefore R^{p}_{\cdot pjk} = 0. \qquad \ldots\ldots(84.3)$$

இயல்பு **4:** R_{rijk} என்பது முதல் இரண்டு பிற்குறிகளிலும் அல்லது பின்னிரண்டு பிற்குறிகளிலும் எதிர்சீர் உடையது.

அதாவது $R_{rijk} = -R_{irjk}$ ……(84.4)

இது 83.6-லிருந்து தெளிவு.

அடுத்து $R_{rijk} = -R_{rikj}$ ……(84.5)

இது 83.1, 84.1 களிலிருந்து தெளிவு.

இயல்பு **5:** R_{rijk} முதல் இணை, இரண்டாம் இணைப் பிற்குறிகளில் சமச்சீர் உடையது

அதாவது $R_{rijk} = R_{jkri}$ ……(84.6)

இது 83.6-லிருந்து தெளிவு.

இயல்பு **6:** R_{rijk} பின் மூன்று சுட்டிணைப்புகளில் $R_{rijk} + R_{rjki} + R_{rkij} = 0$ என்னும் சமன்பாட்டால் தரப்படும் வட்டச்சீர் உடையது.

இயல்பு 2-ன்படி

$$R^{p}_{\cdot ijk} + R^{p}_{\cdot jki} + R^{p}_{\cdot kij} = 0$$

g_{rp} யால் இரு பக்கங்களையும் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$R_{rijk} + R_{rjki} + R_{rkij} = 0 \qquad \ldots\ldots(84.7)$$

குறிப்பு: இயல்பு 3-க்கு கீழ்க்கண்ட நிரூபணமும் தரலாம்.

$$R^{p}_{\cdot ijk} = g^{rp} R_{rijk}$$

எனவே $R^{p}_{\cdot pjk} = g^{rp} \; R_{rpjk} = 0$. ஏனெனில் R_{rpjk} **r, p** க்களில் எதிர்சீர் உடையது.

இயல்பு 7 : ஒரு N-பரிமாண வெளியில் R_{rijk} ல் பூச்சிய மில்லாத தனித்த கூறுகளின் எண்ணிக்கை $\frac{1}{2} N^2 (N^2-1)$ ஆகும்.

நிரூபணம் : இயல்பு 4-ல் கொடுக்கப்பட்ட எதிர்சீர்த்தன்மை களால் $i=r$, $j=k$ ஆகும்போது கூறுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன. $i \neq r$ என்று இருக்கும்போது r, i இவற்றின் சேர்க்கையை (ir) என்று குறிப்பிடுவோம். இச் சேர்க்கை $i\,r$ அல்லது $r\,i$ என இருக்கலாம். எனவே (ri) சேர்க்கைகளின் எண்ணிக்கை $= Nc_2 = \frac{1}{2} N (N-1)$ ஆகும். இதை M எனக் குறிப்போம். இவ்வாறே (jk) ன் சேர்க்கைகளின் எண்ணிக்கையும் M ஆகும். இயல்பு 4-ல் கொடுக்கப்பட்ட எதிர்சீர் தன்மைகள் மட்டுமே இருப்பின் $R_{(ir)}$ (jk) என்னும் தனிக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை M^2 ஆகும். அதாவது ஒவ்வொரு (ir) சேர்க்கையும் ஒவ்வொரு (jk)-ன் சேர்க்கையோடு சேர்ந்து ஒரு தனித்த கூறை அமைக்கும். எனவே M^2 கூறுகள் ஆகின்றன. ஆனல் இயல்பு 5 ல் கொடுக்கப் பட்ட சமச்சீர்த்தன்மை இந்த எண்ணிக்கையை $Mc_2 = \frac{1}{2} M (M-1)$ என்ற அளவில் குறைக்கிறது. எனவே இயல்புகள் 4, 5 மட்டுமே இருப்பின் தனித்த கூறுகளின் எண்ணிக்கை $M^2 - \frac{1}{2} M (M-1) = \frac{1}{2} M (M+1) = \frac{1}{8} N (N-1) (N^2-N+2)$ ஆகும். ஆனல் இயல்பு 6 ஆல் தனித்த கூறுகளின் எண்ணிக்கை மேலும் குறைகிறது.

அடுத்து இயல்பு 6 ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். r, i, j, k என்பன தனித்தனி மதிப்புகள் உடையவைகளாக இருந்தாலன்றி இந்த சமன்பாடு இயல்புகள் 4, 5 ல் அடங்கிவிடுகின்றது. மேலும் i, r, i, j, k களின் தனித்தனி சேர்க்கை ஒன்றுக்கு ஒரு சமன்பாடு தான் கிடைக்கிறது. எனவே 84.7 ஆல் கொடுக்கப்படும் சமன் பாடுகளின் எண்ணிக்கை $N^{c_4} = \frac{1}{24} N (N-1) (N-2) (N-3)$ எனவே R_{rijk} ல் தனித்த கூறுகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{1}{8} N (N-1) (N^2 - N + 2) - \frac{1}{24} N (N-1) (N-2) (N-3)$$
$$= \frac{1}{12} N^2 (N^2 - 1)$$

குறிப்பு : முப்பரிமாண வெளியில் R_{rijk} தனித்த பூச்சிய மில்லாத கூறுகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{1}{12} \times 9 \times (9-1) = 6$ அவை 1212, 1313, 2323, 1213, 2123, 3132 என்னும் பிற்குறிகளை உடையவை.

இரு பரிமாண வெளியில் மொத்தம் $2^4 = 16$ கூறுகள் இருந்தும் அவற்றில் ஒன்றே ஒன்றுதான் பூச்சியமில்லாத தனித்த கூறு ஆகும். அது R_{1212} ஆகும்.

85. ரிசி பண்புரு (Ricci Tensor)

ரீமான்—கிறித்தஃபல் பண்புரு $R^{p}_{\cdot ijk}$ ஐ மூன்று வழிகளில் 'குறுக்கம்' செய்யலாம்.

அவற்றில் ஒன்றான $R^{p}_{\cdot pjk}$ பூச்சியம் என்று முன்னரே கண்டோம்.

அடுத்து $R^{p}_{\cdot ijk}$ என்பது j, k களில் எதிர்ச்சீர் உடையதால், $R^{p}_{\cdot ijp}$ என்னும் குறுக்கத்தை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் போதுமானது. மற்ற குறுக்கம் இதன் குறைத்தன்மை உடையது (negative)

$R^{p}_{\cdot ijp}$ என்னும் குறுக்கத்தால் உருவாகும் பண்புருவை ரிசி பண்புரு என்கிறோம். அதை R_{ij} ஆல் குறிக்கிறோம்.

$$\text{எனவே } R^{p}_{\cdot ijp} = R_{ij} \qquad \ldots\ldots(85.1)$$

$$\text{அடுத்து } R_{ij} = R^{p}_{\cdot rijp}\, g^{ps}\, R_{sijp} \qquad \ldots\ldots(85.2)$$

மேலும்

$$R_{ij} = R^{p}_{\cdot ijp} = \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ip \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q \\ ip \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p \\ qj \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q \\ ij \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p \\ qp \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\log\sqrt{g} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q \\ ip \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p \\ qj \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} q \\ ij \end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x^q}\log\sqrt{g} \qquad \ldots\ldots(85.3)$$

85.3-ல் இருந்து $R_{ij} = R_{ji}$ என்பது தெளிவு. எனவே ரிசி பண்புரு சமச்சீருடையது.

குறிப்பு : R_{ij} சமச்சீர் உடையதால் ஒரு N பரிமாண வெளியில் அதன் தனித்த கூறுகளின் எண்ணிக்கை $\frac{1}{2} N (N+1)$ ஆகும்.

எனவே ஓர் இரு பரிமாண வெளியில் மூன்று தனித்த கூறுகள் உள்ளன. அவை

$$R_{11}=g^{22}R_{2112},\ R_{12}=g^{12}R_{2121},\ R_{22}=g^{11}R_{1221}$$

ஆனால் $N=2$ ஆகும்போது

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g},\ g^{12}=-\frac{g_{21}}{g},\ g^{22}=\frac{g_{11}}{g}$$

எனவே $\dfrac{R_{11}}{g_{11}}=\dfrac{R_{12}}{g_{12}}=\dfrac{R_{22}}{g_{22}}=-\dfrac{R_{1212}}{g}$

எனவே ஓர் இருபரிமாண வெளியில் ரிசிப் பண்புருவின் கூறுகள் அளவைப் பண்புருவின் கூறுகளுக்கு விகிதசமம் உடையவை. இது உயர் பரிமாண வெளிகளுக்குப் பொருந்தாது.

வரையறை 1 : $R=g^{ij}R_{ij}$ ஆல் வரையறை செய்யப்படும் மாற்றமிலியை **கோட்ட மாற்றமிலி** (Curvature invariant) அல்லது **கோட்ட அளவி** (Scalar invariant) என்கிறோம்.

இருபரிமாண வெளியில் $R=-\dfrac{2R_{1212}}{g}$

வரையறை 2 : I ஒரு மாற்றமிலி ஆனால் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $R_{ij}=I\,g_{ij}$ ஆக உள்ள வெளியை **ஐன்ஸ்டீன் வெளி** (Einstein Space) என்கிறோம்.

$$R_{ij}=I\,g_{ij}$$

g_{ij} ஆல் இருபக்கங்களிலும் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$R=I\,\delta^{i}_{i}$$

அதாவது $\quad R=I.N$

எனவே $\quad I=\dfrac{R}{N}.$

எனவே ஓர் ஐன்ஸ்டீன் வெளியில் $R_{ij}=\dfrac{R}{N}g_{ij}$.

இந்தச் சமன்பாடு ஐன்ஸ்டீனின் ஈர்ப்புச் சமன்பாடு (Einstein's gravitational equation) எனப்படும்.

86. பையான்சியின் முற்றொருமை (Bianchi's Identity)

ஒரு குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக்கொள்வோம். அதன் துருவத்தில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன.

எனவே துருவத்தில்

$$R^{p}_{\cdot\, ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}$$

இதை உடன்மாறி வகையிட

$$R^{p}_{.\, ijkr} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left\{R^{p}_{.\, ijk}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}$$

j, k, r இவற்றை வட்டவரிசையில் மாற்ற

$$R^{p}_{.\, ikr,j} = \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ir \end{Bmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^r}\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}$$

$$R^{p}_{.\, irj,k} = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ir \end{Bmatrix}$$

இவற்றைக் கூட்ட,

$$R^{p}_{\cdot\, ijk,\, r} + R^{p}_{.\, ikr,\, j} + R^{p}_{.\, irj,\, k} = 0 \qquad \text{......(86.1)}$$

இந்தப் பண்புருச் சமன்பாடு ஒரு குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பில் துருவத்தில் உண்மை. எனவே ஒவ்வொரு இலக்கெண் அமைப்பிலும் துருவத்தில் உண்மை. மேலும் எந்தப் புள்ளியையும் துருவமாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். எனவே 86·1 வெளியின் புள்ளிகள் அனைத்திலும் உண்மை.

86.1 ஐ g_{pm} ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$R_{mijk,\, r} + R_{mikr,\, j} + R_{mirj,\, k} = 0 \qquad \text{......(86.2)}$$

இந்தச் சமன்பாட்டை பையான்சியின் முற்றொருமை என்கிறோம்.

87. ஐன்ஸ்டீன் பண்புரு (Einstein tensor)

பையான்சியின் முற்றொருமையிலிருந்து ஐன்ஸ்டீனின் சார்புக் கொள்கையில் பயன்படும் மற்றொரு சமன்பாட்டை உருவாக்குகிறோம்.

86.2 ஐ $g^{mk}\,g^{ij}$ ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$g^{mk}g^{ij}\,[R_{mijk,\,r} + R_{mikr,\,j} + R_{mirj,\,k}] = 0$$

(அதாவது) $g^{mk}g^{ij}\,[R_{mijk,\,r} - R_{mirk,\,j} - R_{imrj,\,k}] = 0$

(கோட்டப் பண்புருவின் எதிர்சீர் தன்மைகளால்)

எனவே $g^{ij}R_{ij,\,r} - g^{ij}R_{ir,\,j} - g^{mk}R_{mr,\,k} = 0$

(அதாவது) $R_{,\,r} - R^{j}_{r,\,j} - R^{k}_{r,\,k} = 0$

போலிச் சுட்டிணைப்பு j ஐ k ஆக மாற்ற

(அதாவது) $R_{,\,r} - 2R^{k}_{r,\,k} = 0$ ......(87.1)

அடுத்து, $G^{i}_{.j}$ என்னும் பண்புருவை, கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டால் வரையறை செய்கிறோம்.

$$G^{i}_{.j} = R^{i}_{j} - \tfrac{1}{2} R\,\delta^{i}_{j} \qquad ......(87.2)$$

$G^{t}_{.j}$ ஐ ஐன்ஸ்டீன் பண்புரு என்கிறோம். 87.2 ஐ i ஐப் பொருத்து உடன்மாறி வகையிட

$$G^{i}_{.j,i} = R^{i}_{j,\,i} - \tfrac{1}{2} R_{,\,i}\,\delta^{i}_{j}$$

$$= R^{i}_{j,\,i} - \tfrac{1}{2} R_{,\,j}$$

அதாவது $G^{k}_{.r,\,k} = R^{k}_{r,\,k} - \tfrac{1}{2} R_{,\,r}$

87.1 ஐப் பயன்படுத்தினால்

$$G^{k}_{.r,\,k} = 0 \qquad ......(87.3)$$

இது சார்புக் கொள்கையில் ஒரு முக்கியமான சமன்பாடு ஆகும்.

88. V_N-ல் ஆழ்ந்துள்ள இருபரிமாண வெளியில் இரண்டாம் அடைவு உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்கள்.

V_N-ல் ஆழ்ந்துள்ள இரு பரிமாண வெளி ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம். அதை V_2 எனக் குறிப்போம். u, v என்பன ஒட்டளவைகளானல் V_2-ன் சமன்பாடுகளை $x^r = x^r\ (u,\ v)$ என எழுதலாம். $u = c$, $v = c_1$ என்பன (c, c, மாறிலிகள்) இவ்வெளியில் உள்ள வளைவுகள்.

$A^r\ (u,\ v)$ என்பது இவ்வெளியினில் வரையறை செய்யப்பட்ட ஒரு வெக்டர் களமாக இருக்கட்டும். இனி $\dfrac{\delta A^r}{\delta u}$, $\dfrac{\delta A^r}{\delta v}$ என்னும் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்கள் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படும்.

$$\frac{\delta A^r}{\delta u} = (A^r,\ _i)\ \frac{\partial x^i}{\partial u}$$

$$\frac{\delta A^r}{\delta v} = (A^r,\ _i)\ \frac{\partial x^i}{\partial v}$$

இந்த வகைக்கெழுக்களை மறுபடியும் வகையிடுவதால்

$$\frac{\delta^2 A^r}{\delta u^2},\ \frac{\delta^2 A^r}{\delta v \delta u},\ \frac{\delta^2 A^r}{\delta u \delta v},\ \frac{\delta^2 A^r}{\delta v^2}$$

என்னும் இரண்டாம் அடைவு உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

முடிவு: $$\frac{\delta^2 A^r}{\delta u \delta v} - \frac{\delta^2 A^r}{\delta v \delta u} = R^{r}_{\cdot\, pij}\ A^p\ \frac{\partial x^i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial v} \qquad \ldots\ldots(88.1)$$

நிரூபணம்: $$\frac{\delta A^r}{\delta u} = \left(A^r_{\ ,i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u}$$

$$\therefore\ \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta A^r}{\delta u}\right) = \frac{\delta}{\delta v}\left(A^r_{\ ,i}\ \frac{\partial x^i}{\partial u}\right) = \left(A^r_{\ ,i}\ \frac{\partial x^i}{\partial u}\right)_{,j}\ \frac{\partial x^j}{\partial v}$$

$$\therefore\ \frac{\delta^2 A^r}{\delta v \delta u} = A^r_{\ ,ij}\ \frac{\partial x^i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial v} + A^r_{\ ,i}\ \frac{\partial x^i}{\partial u,_j}\ \frac{\partial x^i}{\partial v} \qquad \ldots\ldots(88.2)$$

மீண்டும், $\frac{\delta A^r}{\delta v} = A^r_{,j} \frac{\partial x^j}{\partial v}$

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta A^r}{\delta v}\right) = \frac{\delta}{\delta u}\left[A^r_{,j} \frac{\partial x^j}{\partial v}\right]$$

$$= A^r_{,ji} \frac{\partial x^j}{\partial v} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u} + A^r_{,j} \frac{\partial x^j}{\partial v}_{,i} \frac{\partial x^i}{\partial u}$$

போலிச் சுட்டிணைப்புகளை மாற்ற

$$\frac{\delta^2 A^r}{\delta u \delta v} = A^r_{,ji} \frac{\partial x^j}{\partial v} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u} + A^r_{,i} \frac{\partial x^i}{\partial v}_{,j} \frac{\partial x^j}{\partial u} \qquad \text{......(88.3)}$$

88.2, 88.3 இவற்றை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{\delta^2 A^r}{\delta v \delta u} = A^r_{,ij} \frac{\partial x^i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial v} + A^r_{,i} \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u}\right) \qquad \text{......(88.4)}$$

$$\frac{\delta^2 A^r}{\delta u \delta v} = A^r_{,ji} \frac{\partial x^i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial v} + A^r_{,i} \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial x^i}{\partial v}\right) \qquad \text{......(88.5)}$$

அடுத்து $\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{\partial x^j}{\partial v} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u}$

$$= \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial x^i}{\partial v}\right)$$

$$\therefore \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u}\right) = \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial x^i}{\partial v}\right) \qquad \text{......(88.6)}$$

மேலும் $A^r_{,ij} - A^r_{,ji} = -R^r_{\cdot pij} A^p \qquad \text{......(88.7)}$

88.4 — 88.5 கழிக்க

$$\frac{\delta^2 A^r}{\delta v \delta u} - \frac{\delta^2 A^r}{\delta u \delta v} = \left(A^r_{ij} - A^r_{,ji}\right) \frac{\partial x^i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial v}$$

$$+ A^r_{,i}\left[\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u} - \frac{\delta}{\delta u}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial v}\right)\right]$$

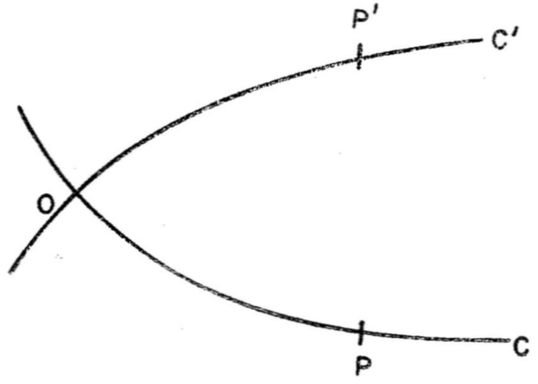
88 6, 88.7 இவற்றைப் பயன்படுத்த

$$\frac{\delta^2 A^r}{\delta v \delta u} - \frac{\delta^2 A^r}{\delta u \delta v} = -R^{r}_{\cdot\, pij} A^p \frac{\partial x^i}{\partial u} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial v}$$

$$\therefore \frac{\delta^2 A^r}{\delta e \delta v} - \frac{\delta^2 A^r}{\delta v \delta u} = R^{r}_{\cdot\, pij} A^p \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \qquad \ldots\ldots(88.8)$$

89. குறுக்கடி விளக்கம் (Geodesic deviation)

வரையறை : இரு பரிமாண வெளி ஒன்றில் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து பிரியும் C, C^1 என்னும் இரு குறுக்கடிகளை எடுத்துக்கொள்க.



$\widehat{OP} = \widehat{OP^1}$ இருக்குமாறு P_1 P^1 என்பன முறையே C_1 C^1ன் மேல் உள்ள புள்ளிகள் என்க. இப்புள்ளிகளை **ஒத்திசைவுப் புள்ளிகள்** (Corresponding points) என்கிறோம். இந்தப் புள்ளிகள் Oவிலிருந்து சமதூரங்களிலேயே இருக்குமாறு குறுக்கடிகளின் மேல் நகர்ந்தால் PP^1 மாறுகிறது. PP^1 என்னும் இந்தத் தூரத்தை **குறுக்கடி விலக்கம்** (Geodesic deviation) என்கிறோம்.

குறுக்கடி விலக்கத்தை ஆராய்வதன்மூலம் வெளியின் தன்மைபற்றி அறியலாம். எடுத்துக்காட்டாக 'குறுக்கடி விலக்கம்' முறையை ஒரு சமதளத்திலும் கோள தளத்திலும் பயன்படுத்துவோம். ஒரு சமதளத்தில் இரு குறுக்கடிகளின் (நேர்கோடுகளின்) மேல் உள்ள ஒத்திசைவுப் புள்ளிகள் பொதுப் புள்ளியிலிருந்து விலகிச் செல்லும்போது 'குறுக்கடி விலக்கம் பெரிதாகிக் கொண்டே போகிறது. கோள தளத்தில் 'குறுக்கடி விலக்கம்' முதலில் பெரிதாகிக் கொண்டேபோய் ஒரு மீப்பெரு அளவை

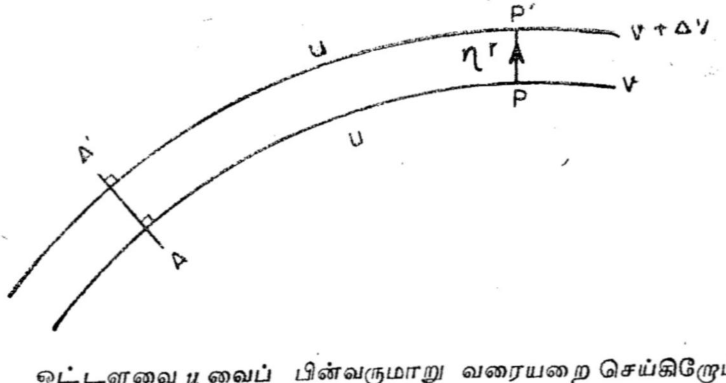
அடைகிறது. பின் குறைந்துகொண்டேபோய் பூச்சியமாகிறது. எனவே 'குறுக்கடி விலக்கம்' சம, கோள தளங்களை வேறுபடுத்தி அறிய உதவுகிறது.

'குறுக்கடி விலக்கம்' என்னும் கருத்தை மிக எளிதாக அறிமுகப்படுத்தவே இருபரிமாண வெளியை எடுத்துக் கொண்டோம். இதே கருத்தை நாம் இப்போது N பரிமாண வெளிக்கு நீட்ட வேண்டும். நீட்டி V_N ல் 'குறுக்கடி விலக்கம்' நிறைவு செய்யும் சமன்பாடுகளை அமைக்க வேண்டும்.

V_N ல் இருபரிமாண வெளி ஒன்றை அமைக்கும் குறுக்கடிகளின் கூட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். அதை V_2 என்போம். V_2 ல் u என்பது ஒவ்வொரு குறுக்கடியின் வழியே மாறும் ஒட்டளவை என்க. v என்பது ஒவ்வொரு குறுக்கடியின் மீதும் மாறாது; ஆனால் ஒரு குறுக்கடியிலிருந்து மற்றொரு குறுக்கடிக்கு மாறும் ஒட்டளவை என்க. எனவே V_2 ன் சமன்பாடுகளை

$x^r = x^r\ (u, v)$ என எழுதலாம். V_2 ல் u வை ஒட்டளவாகக் கொண்டு மாறும் வளைவுகள் குறுக்கடிகள் ஆகும். அதாவது $v =$ மாறிலி என்பது குறுக்கடியின் சமன்பாடு.

$v = G$ (மாறிலி), $v + \delta v = G$ (மாறிலி) என்பன ஒன்றுக்கொன்று மிக நெருங்கியுள்ள குறுக்கடிகள் என்க.



ஒட்டளவை u வைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்கிறோம். V_2 ல் AA' என்னும் வளைவு இந்த குறுக்கடிகளை A, A' களில் செங்கோணத்தில் வெட்டட்டும். u என்பது AA' லிருந்து குறுக்கடியின் மேல் அளக்கப்படும் வில்தூரம் எனக் கொள்வோம். P, P' என்பன ஒத்திசைவுப் புள்ளிகள்.

அடுத்து $Pr = \frac{\partial x^r}{\partial u}$, Pr என்பன குறுக்கடிகளின் அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர்கள். ஒரு குறிப்பிட்ட குறுக்கடியை எடுத்துக்கொண்டால் u மட்டும் மாறுகிறது. எனவே $Pr = \frac{\partial x^r}{\partial u} = \frac{dx^r}{du}$. எனவே Pr , சமன்பாடு 77.6 ஐ நிறைவு செய்கிறது.

அதாவது $\frac{\delta p^r}{\delta u} = 0$

எனவே V_2 ல் $\frac{\delta p^r}{\delta u} = 0$ ......(89.1)

அடுத்து PP' என்னும் கழிநுண் வெக்டரை η^r எனக் குறிப்போம்.

எனவே $\eta^r = \frac{\partial x^r}{\partial v} dv.$ ......(89.2)

P, P' என்பன முறையே C, C' வழியே மாறும்போது η^r ல் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் கவனிப்போம்.

அந்த மாற்றம்

$$\frac{\delta \eta^r}{\delta u} = \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial x^r}{\partial v} dv\right).$$

$$= \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial x^r}{\partial v}\right) dv$$ [∵ இரு குறுக்கடிக் கிடையே dv மாறிலி]

$$= \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\partial x^r}{\partial u}\right) dv$$ [88.6 ன் படி]

$$= \frac{\delta p^r}{\delta v} dv$$

u வை பொருத்து இதன் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு காண

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta u^2} = \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta p^r}{\delta v}\right) dv$$

88·8 ஐ பயன்படுத்தி,

$$= \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta p^r}{\delta u}\right) + R^r_{\cdot sij}\, p^s \left(\frac{\partial x^i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial v}\right) dv$$

$$= 0 + R^r_{\cdot sij}\, p^s p^i \frac{\partial x^j}{\partial v}\, dv \quad [89.1 \text{ ன் படி}]$$

$$\therefore \frac{\delta^2 \eta^r}{\delta u^2} - R^r_{\cdot sij}\, p^s p^i \left(\frac{\partial x^j}{\partial v} dv\right) = 0$$

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta u^2} - R^r_{\cdot sij}\, p^s p^i \eta^j = 0 \quad [89{\cdot}2 \text{ ன் படி}]$$

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta u^2} = R^r_{sji}\, p^s \eta^j p^i = 0$$

s என்பது குறுக்கடியின் மேலுள்ள வில்தூரமெனில் u க்கு s பிரதியிட வேண்டும். மேலும் போலிச் சுட்டிணைப்புகளைப் பொருத்தமாக மாற்ற

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta s^2} = R^r_{\cdot kij}\, p^k \eta^i p^j = 0 \qquad \ldots\ldots(89.3)$$

என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இவை குறுக்கடி விலக்கத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் ஆகும். 89.3ல் N வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் உள்ளன. η^r, $\frac{\delta \eta^r}{\delta s}$ இவற்றின் தொடக்க மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் இந்த சமன்பாடுகளைத் தீர்வு செய்து குறுக்கடி விலக்கத்தின் கூறுகள் η^rகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

90. ரீமானின் கோட்டம் (Riemannian Curvature)

V_Nல் A^i, B^i என்பன P என்னும் புள்ளியில் உள்ள இரு வெக்டர்கள் எனில்,

$R_{rijk}\, A^r A^j B^i B^k$ என்பது ஒரு மாற்றமிலியாகும்.

X^i, Y^i என்பன A^i, B^i களின் நேர்கோட்டிய சேர்க்கைகளாக இருக்கட்டும்.

அதாவது $X^i = \lambda A^i + \mu B^i$, $Y^i = \rho A^i + \tau B^i$. இங்கு λ, μ, ρ, τ என்பன மாற்றமிலிகள்.

இனி, $R_{rijk}\, X^r X^j Y^i Y^k = R_{rijk}\, (\lambda A^r + \mu B^r)\, (\lambda A^j + \mu B^j)$
$(\rho A^i + \tau B^i)\, (\rho A^k + \tau B^k)$

கோட்டப் பண்புருவின் எதிர்சீர்த் தன்மைகளைப் பயன் படுத்திச் சுருக்க

$$R_{rijk}\, X^r X^j Y^i Y^k = (\lambda\tau - \rho\mu)^2\, R_{rijk}\, A^r A^j B^i B^k \quad \ldots\ldots(90.1)$$

எனவே வெக்டர்களின் நேர்கோட்டிய நிலைமாற்றத்தினுல் $R_{rijk}\, A^r A^j B^i B^k$ என்னும் மாற்றமிலி கிட்டத்தட்ட மாற்ற மிலியான வேறு உருகொள்கிறது.

அடுத்து இதே போன்ற இயல்புடைய மற்ருெரு கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம். A^i, B^i க்கு இடையே உள்ள கோணம் θ எனக்கொள்வோம்.

எனவே $\quad (g_{rj}\, g_{ik} - g_{rk}\, g_{ij})\, X^r X^j Y^i Y^k$

$$= (\lambda A_j + \mu B_j)(\lambda A^j + \mu B^j)(\rho A_k + \tau B_k)(\rho A^k + \tau B^k)$$

$$- (\lambda A_k + \mu B^k)(\rho A^k + \tau B^k)(\lambda A_i + \mu B_i)(\rho A^i + \tau B^i)$$

$$= (e_{(A)}\lambda^2 (A)^2 + e_{(B)}\mu^2 (B)^2 + 2\lambda\mu \cos 0AB)$$
$$e_{(A)}\rho^2 (A)^2 + e_{(B)}\tau^2 (B)^2$$

$$+ 2\rho\tau \cos 0AB) - e_{(A)}\lambda\rho (A)^2 + e_B\, \mu\tau (B)^2$$

$$+ (\lambda\tau + \rho\mu) \cos 0AB)^2$$

$$= (\lambda\tau - \mu\rho)^2 [e_{(A)}\, e_{(B)} - \cos^2\theta) A^2 B^2$$

$$= (\lambda\tau - \mu\rho)^2 (g_{rj} g_{ik} - g_{rk} g_{ij}) A^r A^j B^i B^k \quad \ldots\ldots(90.2)$$

$\dfrac{90.1}{90.2}$ ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$$K = \frac{R^{rijk}\;\; A^r A^j B^i B^k}{(grj\, g_{ik} - g_{rk}\, g_{ij})\; A^r A^j B^i B^k} \quad \ldots\ldots(90.3)$$

என்பது ஒரு மாற்றமிலி என்பது தெளிவு. எடுத்துக்கொண்ட வெக்டர் அவற்றின் நேர்கோட்டிய சேர்க்கைகளால் பிரதியிடப் படும்போது K ஒரு மாற்றமிலி ஆகும்.

K என்னும் இந்த மாற்றமிலியை, V_N வெளியின் A^i, B^i என்ற வெக்டர்களுடன் தொடர்பு கொண்ட **ரீமானின் கோட்டம்** (Riemannian Curvature) என்கிருேம்.

குறிப்பு 1: A^i, B^i என்பன செங்கோண அலகு வெக்டர்களானால் K ன் பகுதி எண்ணின் மதிப்பு ஒன்று ஆகும்.

குறிப்பு 2: இரு பரிமாண வெளியில் சார்பிலா வெக்டர்களின் எண்ணிக்கை இரண்டு ஆகும். எனவே K ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தன்னேரில்லாதபடித் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

A^i ஐ (1,0) எனவும் B^i ஐ (0,1) எனவும் எடுத்துக்கொண்டால்

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}{}^2} = \frac{R_{1212}}{g} \qquad \ldots\ldots(90.4)$$

குறிப்பு: 3 வெளி தட்டையானதானல் $R_{rijk} = 0$. எனவே தட்டை வெளியில் $K = 0$.

91 K-ன் வடிவ கணித விளக்கம்

ஒரு N பரிமாண வெளி V_Nல் K-ன் விளக்கத்தைக் காண 89.3 ல் நிரூபித்த குறுக்கடி விலக்கத்தின் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

μ_r என்பது η_r என்னும் விலக்கத்தின் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டர் என்க. η என்பது அதன் நீளம் என்க

எனவே $\eta_r = \eta\mu_r$ $\qquad \ldots\ldots(91.1)$

$$g_{mn}\mu^m\mu^n = \varepsilon_{(\mu)} \qquad \ldots\ldots(91.2)$$

இங்கு $\varepsilon_{(\mu)}$ என்பது μ ன் சுட்டி.

91.1-ஐ 89.3-ல் பிரதியிட

$$\frac{\delta^2(\eta\mu^r)}{\delta s^2} + R^r_{\cdot kij}\, p^k \eta\, \mu^i p^j = 0$$

அதாவது

$$\frac{d^2\eta}{ds^2}\mu_r + 2\frac{d\eta}{ds}\frac{\delta\mu_r}{\delta s} + \eta\frac{\delta^2\mu_r}{\delta s^2} + \eta R^r_{\cdot kij}\, p^k\mu^i p^j = 0 \qquad \ldots\ldots(91.3)$$

இங்கு η^r குறுக்கடியின் எந்தப் புள்ளியிலிருந்து அளக்கப் படுகிறதோ அந்தப் புள்ளியில் p^r அலகு வெக்டர் ஆகும்.

அடுத்து 91.2-ல் இருந்து

$$\mu_m \mu^m = \varepsilon_{(\mu)} \qquad \ldots\ldots(91.4)$$

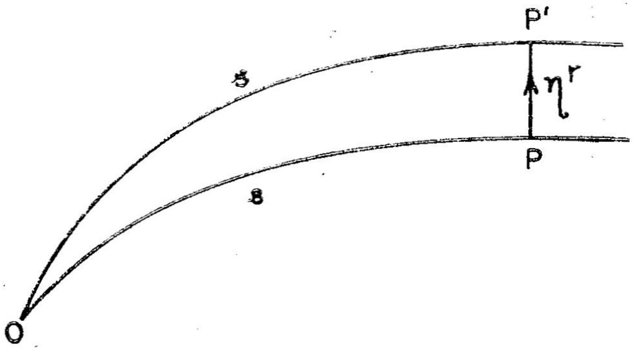
$$\mu_m \frac{\delta \mu^m}{\delta s} = 0 \qquad \ldots\ldots(91.5)$$

$$\frac{\delta \mu_m}{\delta s} \frac{\delta \mu^m}{\delta s} + \mu_m \frac{\delta^2 \mu^m}{\delta s^2} = 0 \qquad \ldots\ldots(91.6)$$

அடுத்து 91.3 ஐ μ_r ஆல் பெருக்கி 91.5, 91.4 பயன்படுத்த

$$\varepsilon_{(\mu)} \frac{d^2 n}{ds^2} + \eta \mu_r \frac{\delta^2 \mu^r}{\delta s^2} + \eta \varepsilon_{(p)} \varepsilon_{(\mu)} K = 0 \qquad \ldots\ldots(91.7)$$

இங்கு K என்பது η^r, p^r என்னும் வெக்டர்களால் வரையறை செய்யப்பட்ட ரீமானின் கோட்டம்.



இரு நெருங்கிய குறுக்கடிகள் O என்னும் புள்ளியிலிருந்து பிரிந்து செல்கின்றன எனக் கொள்வோம். s என்பது O-விலிருந்து அளக்கப்படும் வில்தூரம். P, P^1 என்பன ஒத்திசைவுப் புள்ளிகள். எனவே $s \to 0$ எனும்போது $\eta \to 0$.

எனவே 91-7 ல் இருந்து

$$\underset{s \to 0}{Lt} \frac{d^2 \eta}{ds^2} = 0 \qquad \ldots\ldots(91.8)$$

இனி $s \to 0$ ஆகும்போது 91.3 ன் எல்லையைக் கருதினல்

$$\underset{s \to 0}{Lt} \frac{d\eta}{ds} \cdot \frac{\delta \mu^r}{\delta s} = 0$$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆனல் $\underset{s \to 0}{Lt} \frac{dn}{ds} \neq 0$. அது பூச்சியமானல் குறுக்கடிகள் 0 விலிருந்து பிரியாது.

எனவே $$\underset{s\to 0}{Lt} \frac{\delta\mu^r}{\delta s} = 0 \qquad ......(91.9)$$

மேலும் $\underset{s\to 0}{Lt} \dfrac{d\eta}{ds} = \theta$ எனக் கொள்க ......(91.10)

அடுத்து 91.9 ஐ 91.6 ல் பயன்படுத்த

$$\underset{s\to 0}{Lt}\ \mu_r \frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2} = 0 \qquad ......(91.11)$$

மேலும் 91.7 ஐ η ஆல் வகுத்து s ஐ 0 க்கு அணுக அனுமதித்தால்

$$\underset{s\to 0}{Lt} \frac{1}{\eta} \frac{d^2\eta}{ds^2} = -\varepsilon K \qquad ......(91.12)$$

இங்கு ε என்பது ஒவ்வொரு குறுக்கடியின் சுட்டி; அவை இரண்டும் மிக நெருங்கியுள்ளதால், அவற்றிற்கு ஒரே சுட்டிதான் இருக்கும்.

η என்பது s ன் அடுக்குத் தொடராக (Power series) விரிக்கப் படுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$\eta = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3$......என்க ......(91.13)

$s \to 0$ ஆகும்போது $\eta \to 0$ எனவே $a_0 = 0$.

அடுத்து $\dfrac{d\eta}{ds} = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + ...$

$s \to 0$ ஆகும்போது $\dfrac{d\eta}{ds} \to 0$

$$\theta = a_1 \qquad \therefore a_1 = \theta.$$

அடுத்து $\dfrac{d^2\eta}{ds^2} = 2a_2 + 6a_3 s + ...$

$s \to 0$ ஆகும்போது $\dfrac{d^2\eta}{ds^2} \to 0$

$\therefore a^2 = 0.$

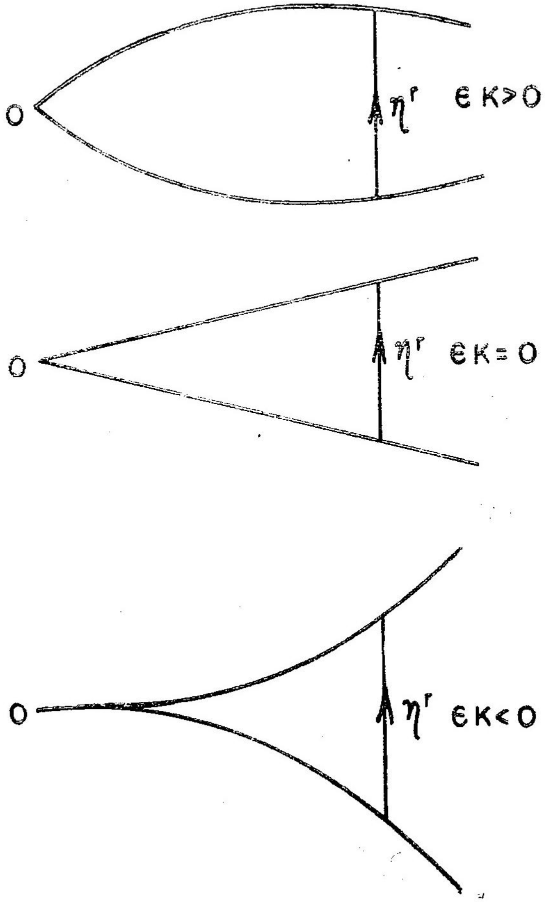
மேலும் $\dfrac{1}{\eta} \dfrac{d^2\eta}{ds^2} = 6a_3 + s$ உள்ள உறுப்புகள் $s \to 0$ ஆகும்போது $-\varepsilon K = 6a_3 \quad \therefore \quad a_3 = -\frac{1}{6}\varepsilon K$

எனவே $$\eta = \theta s - \tfrac{1}{6}\varepsilon K s^3 + ... \qquad ......(91.14)$$

இந்த சூத்திரம் நமக்கு K ன் வரை கணித விளக்கத்தைத் தருகிறது. 91.10 ல் வரையறை செய்யப்பட்ட θ, பொதுப்புள்ளியில்

இரு குறுக்கடிகளுக்கு இடையே உள்ள சிறிய கோணம் ஆகும். [∵ $\frac{\Delta\eta}{\Delta s}$ tan θ, θ சிறியதாக இருந்தால் tan $\theta=\theta$] எனவே 91.14 ல் உள்ள முதல் உறுப்பு θs யூக்லிடின் வெளியில் நமக்குப் பழக்கமான விளக்கத்தைத் தருகிறது. அடுத்த உறுப்பையும் சேர்த்துக் கவனித்தால், ரீமானின் கோட்டம் மிகைத் தன்மையுடையதாக இருப்பின் η குறைந்து கொண்டே வரும். எனவே அது குறுக்கடிகள் குவிவதைக் (convergence) குறிக்கும். ரீமானின் கோட்டம் குறைந்த தன்மையுடையதாக இருந்தால் குறுக்கடிகள் விரிவதைக் (Divergence) குறிக்கும்.

குறுக்கடிகளின் தன்மை படங்களில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.



இங்கு குவிவது, விரிவது என்பனவற்றை யூக்லிடின் வெளியில் உள்ள நேர்கோடுகளின் தன்மைகளுக்குத் தொடர்புபடுத்தியே பொருள் கொள்கிறோம் என்பதை அறியவேண்டும். V_N வெளியில் குவிவது, விரிவது என்பன தன்னியல்பான தன்மைகளாகக் கொண்டு நாம் பொருள் செய்வதில்லை.

92. மாறுத கோட்ட வெளி (Space of constant curvature)

தேற்றம் : ஒரு வெளியின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ரீமானின் கோட்டம் ஆரம்ப வெக்டர்களின் சார்பு இல்லாததாக இருப்பின், அது அந்த வெளி முழுமைக்கும் மாறிலி ஆகும்.

இப்பொழுது,

$$K=\frac{R_{rijl}\ A^r A^j B^i B^l}{(g_{rj}\,g_{il}-g_{rl}\,g_{ij})\ A^r A^j A^i A^l} \qquad \ldots\ldots(92.1)$$

K என்பது வெக்டர் A^i, B^i களின் சார்பு இல்லாதது எனக் கொள்வோம்.

அவ்வாறெனில் எல்லா A^i B^iக்களுக்கும்

$$[K(g_{rj}\,g_{il}-g_{rl}\,g_{ij})-R_{rijl}]\ A^r A^j\ B^i B^l=0 \qquad \ldots\ldots(92\ 2)$$

இதுவே தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடு. இது எல்லா A^i, B^iக்களுக்கும் பொருந்துவதால்

$$R_{rijl}=K\,(g_{rj}\,g_{il}-g_{rl}\,g_{ij}) \text{ ஆகிறது.}$$

இங்கு K என்பது இலக்கெண்கள் x^i ன் சார்பு எனவே x^t ஐப் பொருத்து உள்ளார்ந்த வகையிட

$$R_{rijl,\,t}=K_{,\,t}\,(g_{rj}\,g_{il}-g_{rl}\,g_{ij})$$

இதை பையான்சியின் முற்றொருமையில் பிரதியிட

$$K_{,t}\,(g_{rj}\,g_{il}-g_{rl}\,g_{ij})+K_{,j}\,(g_{rl}\,g_{it}-g_{rt}\,g_{il})$$
$$+K_{,\,l}\,(g_{rt}\,g_{ij}-g_{rj}\,g_{it})=0$$

$g^{rj}\,g^{il}$ ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்ய,

$$K_{,\,t}\left(\delta^j_j\,\delta^l_i-\delta^j_l\,\delta^l_j\right)+K_{,\,j}\left(\delta^j_l\,\delta^l_t-\delta^j_t\,\delta^l_i\right)$$
$$+K_{,\,l}\left(\delta^j_t\,\delta^l_j-\delta^r_r\,\delta^l_t\right)=0$$

அதாவது $K_{,t}\left(N^2-\delta^l_l\right)+K_{,j}\left(\delta^j_t-N\delta^j_t\right)$

$$+K_{,l}\left(\delta^l_t-N\delta^l_t\right)=0.$$

எனவே

$K_{,t}(N^2-N)+K_{,t}(1-N)+K_{,t}(1-N)=0$ ம்

$(N-1)(N-2)K_{,t}=0$

எனவே $N>2$ எனின் K என்பது மாறிலியாகும்.

இவ்வாறு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் K மாறிலியாகவுள்ள V_N $(N>2)$ஐ **மாருத கோட்டவெளி** என்கிறோம்.

பயிற்சி

1. $R_{pqrs}=R_{rspq}$ என நிரூபிக்க.

2. நிரூபிக்க

$$R_{pqrs}+R_{rqps}+R_{rspq}+R_{psrq}=0$$

3. ஒரு V_2ல் அளவை உரு $(ds)^2=(dx^1)^2+G^2\,(dx^2)^2$ ஆகும். இங்கு G என்பது x^1, x^2க்களின் சார்பு.

$$R_{1212}=-G\frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2}$$ என நிரூபி.

4. ஒரு வெளியின் கோட்டுமூலம்

$(ds)^2=(dx^1)^2+(\sin x^1)^2\;(dx^2)^2$ ஆல் கொடுக்கப்பட்டால் $R^{p}_{\cdot ijk}\neq 0$ எனக் காட்டு.

5. ஓர் ஐன்ஸ்டீன் வெளியில் $R^l_i=g^{lj}R_{ij}$ எனில்

$$R^l_{i,l}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i}$$ என நிரூபி.

6. மாருத கோட்டம் K, உடைய வெளி ஓர் ஐன்ஸ்டீன் வெளி என நிரூபி. மேலும் $R=K^N(1-N)$ எனக் காட்டுக

7. ஒரு யூக்லிடின் V_4 ல் $x^1=C\sin\theta\sin\phi\sin\psi$, $x^2=C\sin\theta\sin\phi\cos\psi$, $x^3=C\sin\theta\cos\phi$, $x^4=C\cos\theta$ என்ற சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படும் மாவிரிகோளம் $\frac{1}{C^2}$ எனும் மாருத கோட்டமுடைய ஒரு V^3 என நிரூபி.

10. வெளி வளைவுகளின் வடிவ கணிதம்
(Geometry of Space Curves)

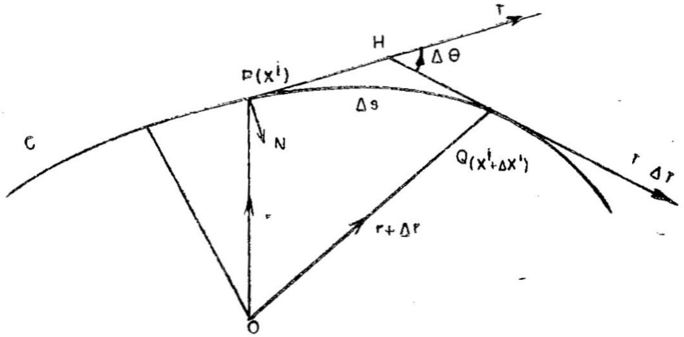
93. இந்த அதிகாரத்தில் நாம் சாதாரண முப்பரிமாண வெளியில் உள்ள வளைவுகளின் வகையீட்டு வடிவ கணிதத்தைக் (Differential Geometry) கற்போமாக.

ஒரு முப்பரிமாண வெளியில், t ஐ ஒட்டளவையாகக்கொண்டு ஒரு வளைவின் சமன்பாடுகளை,

$$x^i = x^i(t) \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \; (i=1,\, 2,\, 3)$$

என எழுதலாம். வளைவு முழுவதும் ஒரே தளத்தில் அமைந்திருந்தால் அதைத் தள வளைவு (Plane curve) என்றும், பல தளங்களைக் கிழித்துக்கொண்டு அமைந்திருந்தால் அதைத் (திரிபுடை வளைவு) (Skew curve) என்றும் சொல்கிறோம்.

94. வளைவின் தொடுகோட்டு வெக்டர்



$P(x^i)$ என்பது வளைவு C ன் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளி என்க. $Q\,(x^i + \triangle x^i)$ என்பது C ன் மேல் P க்கு நெருங்கிய புள்ளி என்க. $\widehat{PQ} = \triangle s$ என்க. Q, P ஐ நெருங்கும்போது $\overrightarrow{PQ}$ ன் எல்லை Pல் தொடுகோடு ஆகும்.

எனவே $Lt \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\triangle s}$ என்பது தொடுகோட்டு வெக்டர் ஆகும். அதை **T** எனக்குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே T^i என்பன **T** என்னும் தொடுகோட்டு வெக்டரின் முரண் மாறிக் கூறுகள் எனின்,

$$\frac{dx^i}{ds} = T^i \qquad \ldots\ldots(94.1)$$

மேலும் $$(ds)^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

எனவே $$s = \int_{t_0}^{t} \left(g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

வளைவின் ஊடே அளக்கப்படும் வில்தூரம் s ஐ வளைவின் ஒட்டளவையாகக் கொண்டால், வளைவின் சமன்பாடுகளை $x^i = x^i(s)$ என எழுதலாம்.

மேலும் $$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^j}{ds} = 1$$

எனவே $$g_{ij}\, T^i\, T^j = 1 \qquad \ldots\ldots(94.2)$$

$\therefore$ T^i ஓர் அலகு வெக்டர்,

$\therefore$ T^i என்பன வளைவு C க்கு P என்ற புள்ளியில் உள்ள அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் **T** ன் முரண்மாறிக் கூறுகள் ஆகும்.

குறிப்பு 1: இந்த அதிகாரத்தில் இனிவரும் ஆய்வுகளில், வளைவு Cக்கு எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ந்து திரும்பும் தொடுகோடு உண்டு என்று கொள்கிறோம்.

குறிப்பு 2: y^i என்பன $P(x^i)$ ன் செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் என்க. $\overline{T}^i$ என்பன இந்த அமைப்பில் **T** ன் கூறுகள் என்க. அவ்வாறெனில்

$$\overline{T}^i = \frac{dy^i}{ds}$$

இந்தக் கூறுகள் **T** ன் திசைக் கொசைன்கள் ஆகும்.

95. வளைவின் கோட்டம்.

ஒரு புள்ளியில் ஒரு வளைவு வளையும் வீதத்தை அந்தப் புள்ளியில் வளைவின் கோட்டம் என்கிறோம். எனவே ஒரு புள்ளியில் வளைவின் கோட்டம் என்பது அந்தப் புள்ளியில் வில்தூரத்தைப் பொருத்துத் தொடுகோடு திரும்பும் வீதம் ஆகும்.

$P(x^i)$, $Q(x^i+\triangle x^i)$ இவற்றின் தொடுகோடுகளுக் கிடையே உள்ள கோணம் $\triangle\theta$ எனில் $\dfrac{\triangle\theta}{\triangle s}$ என்பது வில் PQ-ன் சராசரிக் கோட்டம் ஆகும். $\triangle s\to 0$ எனும்போது இதன் எல்லை P ல் வளைவின் கோட்டத்தைத் தரும். அதாவது P ல் வளைவின் கோட்டம் $= \underset{\triangle s\to 0}{Lt} \dfrac{\triangle\theta}{\triangle s} = \dfrac{d\theta}{ds}$. இதை K எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே $$K=\frac{d\theta}{ds} \qquad ......(95.1)$$

$\mathbf{T}$ என்பது P ல் தொடுகோட்டு வெக்டர் எனில் $\mathbf{T}=\triangle\mathbf{T}$ என்பது Q ல் தொடுகோட்டு வெக்டர் என்க. $\mathbf{T}$ என்பது அலகு வெக்டர் ஆதலின்

$$\underset{\triangle s\to 0}{Lt}\left|\frac{\triangle\mathbf{T}}{\triangle s}\right| = \underset{\triangle s\to 0}{Lt}\frac{\triangle\theta}{\triangle s}$$

அதாவது $$\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{d\theta}{ds}=K \qquad ......(95.2)$$

96. முதன்மைச் செங்குத்து (Principal Normal)

T^i அலகு வெக்டர் ஆதலால்

$$g_{ij}\,T^iT^j = 1$$

இதை s ஐ பொருத்து உள்ளார்ந்த வகையிட

$$g_{ij}\,T^i\,\frac{\delta T^j}{\delta s} + g_{ij}\,\frac{\delta T^i}{\delta s}\,.\,T^j=0$$

g_{ij} சமச்சீர் உடையதால்

$$2g_{ji}\,T^i\,\frac{\delta T^j}{\delta s}=0$$

அதாவது $$g_{ij}\,T^i\,\frac{\delta T^j}{\delta s}=0 \qquad ......(96.1)$$

எனவே $\frac{\delta T^j}{\delta s}$ பூச்சியமாகிறது; அல்லது T^i க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. $\frac{\delta T^j}{\delta s}$ பொதுவாக பூச்சியமில்லை. எனவே அது T^i க்குச் செங்குத்தானது. T^i க்குச் செங்குத்தாக இருந்தால் P-ல் வளைவுக்குச் செங்குத்து என்று கூறுகிறோம்.

மேலும் $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\delta T^j}{\delta s}\mathbf{a}_j$, இங்கு $\mathbf{a}_j$ என்பன அடிப்படை அலகு வெக்டர்கள்.

எனவே $\left|\frac{\delta T^j}{\delta s}\ \mathbf{a}_j\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = K$ (95-2 ன் படி)

அதாவது $\left|\frac{\delta T^j}{\delta s}\right|\ \left|\mathbf{a}_j\right| = K$ (ஆனால் $|\mathbf{a}_j| = 1$

எனவே $\left|\frac{\delta T^j}{\delta s}\right| = K$

$\frac{\delta T^j}{\delta s}$ ன் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டரை N^j எனக்கொள்வோம்.

எனவே $\frac{\delta T^i}{\delta s} = KN^j$ என எழுதலாம். ......(96.2)

இதில் K என்பது $\frac{\delta T^j}{\delta s}$ ன் அளவு; அது P ல் வளைவின் கோட்டமும் ஆகும். N^j என்னும் அலகு வெக்டரை P ல் C க்கு வரையப்பட்ட முதன்மைச் செங்குத்து வெக்டர் (principal normal vector) என்கிறோம்.

N^j என்னும் அலகு வெக்டர் P, Q என்னும் புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளினால் உறுதி செய்யப்பட்ட தளத்தில் அமைந்திருக்கும். இந்தத் தளம் P க்கு மிக நெருக்கமாக அமைந்த மூன்று அடுத்தடுத்த புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் தளம் ஆகும். இதை P ல் அமைந்த கொஞ்சுதளம் (oscillating plane) என்கிறோம்.

97. துணைச்செங்குத்து (Bi-normal)

அடுத்து, P ல், தொடுகோட்டு வெக்டர் $\mathbf{T}$, முதன்மைச் செங்குத்துவெக்டர் $\mathbf{N}$ இரண்டிற்கும் செங்குத்தாக உள்ளவாறும், $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ ஒரு வலக்கை அமைப்பாக இருக்குமாறும் உள்ள $\mathbf{B}$ என்னும் ஓர் அலகு வெக்டரை வரையறை செய்கிறோம்.

வரையறையின்படி B^i என்னும் அதன் கூறுகள்

$$B^i = \varepsilon^{ijk} T_j N_k \qquad ......(97.1)$$

ஆல் தரப்படுகின்றன. B^i ஐத் துணைச் செங்குத்து வெக்டர் என்கிறோம்.

இனி, T^i, N^i என்பன செங்கோணத்தில் அமைந்திருப்பதால்

$$g_{ij} T^i N^j = 0$$

s ஐப் பொருத்து உள்ளார்ந்த வகையிட

$$g_{ij} T^i \frac{\delta N^j}{\delta s} + g_{ij} \frac{\delta T^i}{\delta s} N^j = 0$$

96.2 ஐ பயன்படுத்த

$$g_{ij} T^i \frac{\delta N^j}{\delta s} + g_{ij} K N^i N^j = 0$$

ஆனால் $g_{ij} N^i N^j = 1 = g_{ij} T^i T^j$

எனவே, பிரதியிட

$$g_{ij} T^i \frac{\delta N^j}{\delta s} + K g_{ij} T^i T^j = 0$$

$$\therefore g_{ij} T^i \left(\frac{\delta N^j}{\delta s} + K T^j \right) = 0 \qquad ......(97.2)$$

மேலும் $g_{ij} N^i N^j = 1$

s ஐப் பொருத்து உள்ளார்ந்த வகையிட

$$g_{ij} N^i \frac{\delta N^j}{\delta s} = 0 \qquad ......(97.3)$$

மேலும் $g_{ij} N^i T^j = 0 \qquad ......(97.4)$

(97.3) + K (97.4) ஐக் கணக்கிட

$$g_{ij} N^i \left(\frac{\delta N^j}{\delta s} + K T^j \right) = 0 \qquad ......(97.5)$$

எனவே 97.2, 97.5 களிலிருந்து $\frac{\delta N^j}{\delta s} + K T^j$ என்பது தொடு கோட்டு வெக்டர் T^j க்கும், முதன்மைச் செங்குத்து வெக்டர் N^i க்கும் செங்குத்தானது. எனவே B^j ன் திசையில் உள்ளது.

எனவே $\frac{\delta N^j}{\delta s} + KT^j = \tau\ B^j$ ......(97.6)

என எழுதலாம். இங்கு கொடுக்கப்பட்ட மாற்றமிலி τ ஐ p-ல் அந்த வளைவின் முறுக்கம் (torsion) என்கிறோம்.

குறிப்பு: K என்பது வெக்டர் **N** ன் அளவு ஆதலின் அது எப்போதும் மிகைத் தன்மையுடையது, ஆனால் τ எப்போதும் மிகைத்தன்மையுடையதல்ல. குறைத்தன்மையுடையதாகவும் இருக்கலாம். அதனுடைய குறியைக் கீழ்க்கண்ட மாற்றமிலி

$\varepsilon_{ijk}\ T^i\ N^j\ B^k$ன் குறி மிகைத்தன்மையுடையதாக இருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்கிறோம். அதாவது **T, N, B** வலக்கை அமைப்பாக இருக்கவேண்டும்.

98. ஃப்ரெனெ சூத்திரங்கள் (Frenet formulae)

அடுத்து, 97.1 ன்படி $B^i = \varepsilon^{ijk}\ T_j\ N_k$ ......(98.1)

s ஐப் பொருத்து உள்ளார்ந்த வகையிட

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = \varepsilon^{ijk}\ \frac{\delta T_j}{\delta s}\ N_k + \varepsilon^{ijk}\ T_j\ \frac{\delta N_k}{\delta s} \qquad \text{......(98.2)}$$

96.2, 97.6 இவற்றில் சுட்டிணைப்பு இறக்கம் செய்ய

$$\frac{\delta T_j}{\delta s} = KN_j\ ;\ \tau\ B_j = \frac{\delta N_j}{\delta s} + KT_j$$

இவற்றைப் பயன்படுத்தி 98.2 ல் $\frac{\delta T_j}{\delta s}$, $\frac{\delta N_k}{\delta s}$ களுக்குப் பிரதியிட

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = \varepsilon^{ijk}\ K\ N_j\ N_k + \varepsilon^{ijk}\ T_j\ (\tau\ B_k - K\ T_k) \qquad \text{......(98.3)}$$

ε^{ijk} எதிர்ச்சீர் தன்மையுடையது ஆதலின்

$\varepsilon^{ijk}\ T_j\ T_k = 0$, $\varepsilon^{ijk}\ N_j\ N_k = 0$

இவற்றை 98.3 ல் பயன்படுத்த

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = \tau\ \varepsilon^{ijk}\ T_j\ B_k \qquad \text{......(98.4)}$$

$\mathbf{T}_i$, N_i, B_i என்பன வலக்கை அமைப்பில் உள்ள அலகு வெக்டர்கள் ஆதலின்

$$\varepsilon^{ijk}\ T_j\ B_k = -N^i \qquad \text{......(98.5)}$$

98.4 ல் பிரதியிட

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = -\tau N^i \qquad \text{......(98.6)}$$

சமன்பாடுகள் 96·2, 97·6, 98·6 மூன்றும் ஃப்ரெனெயின் சூத்திரங்கள் (The Frenet formulae) என்று அழைக்கப்படுகின்றன. வளைவுகளின் வகையீட்டு வடிவகணிதத்தில் அவை சிறப்பிடம் வகிக்கின்றன. எனவே எளிதில் நினைவில் வைத்துக்கொள்ளும் வகையில் கீழ்க்கண்டவாறு அவற்றைத் தொகுத்து எழுதுகிறோம்.

$$\frac{\delta T^i}{\delta s} = \quad K N^i$$

$$\frac{\delta N^i}{\delta s} = -K T^i \quad + \tau B^i$$

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = \quad -\tau N^i$$

P வளைவில் நகரும்பொழுது, முதல் சூத்திரம் தொடுகோட்டு வெக்டர் **T** திரும்பும் வீதத்தையும், இரண்டாவது சூத்திரம் முதன்மை செங்குத்து **N** திரும்பும் வீதத்தையும், மூன்றாவது துணைச் செங்குத்து **B** திரும்பும் வீதத்தையும் தருகின்றன.

ஃப்ரெனெ சூத்திரங்களை கிறித்தஃபல் குறியீடுகளைப் பயன் படுத்தி வெளிப்படையாக எழுதினால் அவற்றின் தோற்றம் வருமாறு :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT^i}{ds} + \left\{ {i \atop jk} \right\} T^j \frac{dx^k}{ds} = KN^i \\ \text{அல்லது} \quad &\frac{d^2x_i}{ds^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = KN^i \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dN^i}{ds} + \left\{ {i \atop jk} \right\} N^j \frac{dx^k}{ds} = -(KT^i - \tau B^i)$$

$$\frac{dB^i}{ds} + \left\{ {i \atop jk} \right\} B^j \frac{dx^k}{ds} = -\tau N^i$$

குறிப்பு: இலக்கெண் அமைப்பு செவ்வக தெக்காட்டின் அமைப்பானால், கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகும். உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்கள் சாதாரண வகைக்கெழுக்கள் ஆகும். எனவே ஃப்ரெனெ சூத்திரங்கள் நமக்குப் பழக்கமான தோற்றத்தைப் பெறுகின்றன.

99. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : $aT^i+bN^i+cB^i$ என்பன Cன் வழியே உள்ள ஓர் இணை வெக்டர் களம் எனில்

$$\frac{da}{ds}-kb=0,\ \frac{db}{ds}+Ka-\tau c=0,\ \frac{dc}{ds}+\tau b=0$$

என நிரூபி.

விடை : $aT^i+bN^i+cB^i$ என்பது ஒரு வளைவின் வழியே ஓர் இணை வெக்டர் களம். எனவே

$$\frac{\delta\,(aT^i+bN^i+cB^i)}{\delta s}=0$$

அதாவது

$$\frac{da}{ds}T^i+a\frac{\delta T^i}{\delta s}+\frac{db}{ds}N^i+b\frac{\delta N^i}{\delta s}+\frac{dc}{ds}B^i$$

$$+c\,\frac{\delta B^i}{\delta s}=0.$$

[a ஒரு மாற்றமிலி ஆனல் $\dfrac{\delta a}{\delta s}=\dfrac{da}{ds}$, 67ன் படி என்பதைக் கவனிக்க]

ஃப்ரெனெ்யின் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்த

$$\frac{da}{ds}T^i+akN^i+\frac{db}{ds}N^i+b\,(\tau B^i-k^iT)$$

$$+\frac{dc}{ds}B^i+c\,(-\tau N^i)=0$$

அதாவது

$$\left(\frac{da}{ds}-kb\right)T^i+\left(\frac{db}{ds}+ka-\tau c\right)N^i+\frac{dc}{ds}+b\tau\Big)B^i=0$$

எனவே
$$\frac{da}{ds}-kb=0,\ \frac{db}{ds}+ka-\tau c=0$$

$$\frac{dc}{ds}+\tau b=0$$

கணக்கு 2 : $\varepsilon^{ijl}\ \dfrac{\delta T_i}{\delta s}\ \dfrac{\delta^2 T_j}{\delta s^2}\ \dfrac{\delta^3 T_l}{\delta s^3}=k^5\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\tau}{k}\right)$

என நிரூபி.

$$\frac{\delta T^i}{\delta s} = kN^i \quad \therefore \frac{\delta T_i}{\delta s} = kN_i$$

$$\frac{\delta^2 T^i}{\delta s^2} = \frac{dk}{ds} N^i + k \frac{\delta N^i}{\delta s}$$

$$= \frac{dk}{ds} N^i + k\,(\tau B^i - kT^i)$$

$$\therefore \frac{\delta^2 T_i}{\delta s^2} = \frac{dk}{ds} N_i + k\tau\ B_i - k^2\ T_i$$

அடுத்து $$\frac{\delta^3 T_i}{\delta s^3} = \frac{d^2k}{ds^3} N^i + \frac{dk}{ds}\frac{\delta N^i}{\delta s} + \frac{dk}{ds}\tau B^i + k\frac{d\tau}{ds} B^i + k\tau\frac{\delta B^i}{\delta s} - 2k\frac{dk}{ds}\frac{\delta T^i}{\delta s} - k^2\frac{\delta T^i}{\delta s}$$

ஃப்ரெனெ சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி சுருக்க

$$\frac{\delta^3 T^i}{\delta s^3} = \left(\frac{d^2k}{ds^2} - k\,\tau^2 - k^3\right) N^i + \left(2\tau\frac{dk}{ds} + k\frac{d\tau}{ds}\right) B^i - 3k\frac{dk}{ds}\ T^i$$

$= \lambda\ N^i + \mu\ B^i + \nu\ T^i$ என்க.

எனவே $$\frac{\delta^3 T_i}{\delta s^3} = \lambda\ N_i + \mu B_i + \nu\ T_l$$

$$\therefore \varepsilon^{ijl}\ \frac{\delta T_i}{\delta s}\ \frac{\delta^2 T_j}{\delta s^2}\ \frac{\delta^3 T_l}{\delta s^3}$$

$$= \varepsilon^{ijl} k\ N_i\ \left(\frac{dk}{ds}\ N_j + k\,\tau\ B_j - k^2\ T_j\right)(\lambda\ N_l + \mu\ B_l + \nu\ T_l)$$

$$= \varepsilon^{ijl}\ k^2\tau\ \nu\ \ N_i\ B_j\ T_l - \varepsilon^{ijl}\ k^3\mu\ N_i\ T_j\ B_l$$

மற்ற பெருக்கற்பலன்கள் பூச்சியமாகின்றன.

$$= +k^2\tau\nu + k^3\mu$$

$$= -k^2\tau . 3k\ \frac{dk}{ds} + k^3\left(2\tau\ \frac{dk}{ds} + k\ \frac{d\tau}{ds}\right)$$

$$= d^4\ \frac{d\tau}{ds} - \tau k^3\ \frac{dk}{ds}$$

$$=k^5\left[\frac{k\dfrac{d\tau}{ds}-\tau\dfrac{k}{ds}}{k^2}\right]$$

$$=k^5\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{k}\right)$$

கணக்கு 3 : உருளை இலக்கெண் அமைப்பில் a ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடுகள் $x^1=a,\ x^2=\theta\ (s),\ x^3=0$ ஆல் தரப்படுகின்றன. வட்டத்தின் கோட்டம் $\frac{1}{a}$ எனநிரூபி. மேலும் தொடுகோட்டு, முதன்மைச் செங்குத்து, துணைச் செங்குத்து வெக்டர்களைக் கண்டுபிடிக்க.

விடை : உருளை இலக்கெண் அமைப்பில் அளவை உரு

$$(ds)^2=(dx^1)^2+(x^1)^2(dx^2)^2+(dx^3)^2$$

$$\therefore\ g_{mn}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

அடுத்து மறையாத கிறித்தஃபல் குறியீடுகள்

ஆவன $\left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}=-x^1,\ \left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}2\\21\end{matrix}\right\}=\frac{1}{x^1}$

$T^i=\frac{dx^i}{ds}$ என்பன வட்டத்தின் தொடுகோட்டு வெக்டர் T ன் கூறுகள். எனவே $T^1=\frac{dx^1}{ds}=0,\ T^2=\frac{dx^2}{ds}=\frac{d\theta}{ds},\ T^3=0.$

அதாவது T^i என்பன $\left(0,\frac{d\theta}{ds},0\right)$

T^i என்பது அலகு வெக்டர் ஆதலின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும், $g_{ij}\,T^i\,T^j=1$

அதாவது $(x^1)^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=1$

$$a^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=1$$

$$\therefore\ \frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{a}.$$

முதல் ஃப்ரெனியின் சூத்திரத்தின்படி

$$kN^1 = \frac{\delta T^1}{\delta s} = \frac{dT^1}{ds} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ mn \end{matrix} \right\} T^m \frac{dx^n}{ds}$$

$$= 0 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} T^2 \frac{dx^2}{ds}$$

$$= -x^1 \left(\frac{d\theta}{ds}\right) \left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -a - \frac{1}{a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$kN^2 = \frac{\delta T^2}{ds} = \frac{dT^2}{ds} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ mn \end{matrix} \right\} T^m \frac{dx^n}{ds}$$

$$= \frac{d^2\theta}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} T^2 \frac{dx^1}{ds}$$

$$= \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{1}{x^1} \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{da}{ds}$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{da}{ds}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$kN^3 = \frac{\delta T^3}{\delta s} + \left\{ \begin{matrix} 3 \\ mn \end{matrix} \right\} T^m \frac{dx^n}{ds} = 0$$

அடுத்து N^i அலகு வெக்டர் ஆதலின்

$$k^2 = g_{ij} (kN^i)\, kN^j)$$

$$= g_{11} (kN^1) (kN^1) + g_{22} (kN^2) (kN^2) + g_{33} (kN^3) (kN^3)$$

($\because g_{ij} = 0,\ i \neq j$ எனில்)

$$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}\right) + 0 + 0$$

$$k^2 = \frac{1}{a^2} \qquad \therefore k = \frac{1}{a}.$$

எனவே $N^1 = -1,\ N^2 = 0,\ N^3 = 0$

$\therefore$ N^i என்பன $(-1, 0, 0)$

அடுத்து துணை செங்குத்து B^i ஐயும் τ வையும் கண்டு பிடிப்போம்.

$$B^i = \varepsilon^{ijl}\, T_j\, N_l$$

$$\therefore B^1 = \varepsilon^{123} T_2 N_3 + {}^{132} T_3 N_2 = 0+0=0$$

$$B^2 = \varepsilon^{2jl} T_j N_l$$

$$= \varepsilon^{213} T_1 N_3 + \varepsilon^{231} T_3 N_1 = 0+0=0$$

$$B^3 = \varepsilon^{3jl}\, T_j N_l$$

$$= \varepsilon^{312} T_1 N_2 + \varepsilon^{321} T_2 N_1$$

$$= 1.\,0.0 - \frac{1}{\sqrt{g}}\, \frac{d\theta}{ds}\,. -1$$

$$= a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

எனவே B^i என்பன $(0,0,1)$

மேலும் $\dfrac{\delta B^i}{\delta s} = -\tau N^i$

எனவே $\tau = 0$.

பயிற்சி

1. பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்கவும் :

(i) $k^2 = g_{ij}\, \dfrac{\delta T^i}{\delta s}\, \dfrac{\delta T^j}{\delta s}$

(ii) $\tau = \varepsilon^{ijl} T_i N_j\, \dfrac{\delta N_l}{\delta s}$

(iii) $k B_i = \varepsilon_{ijl}\, T^j\, \dfrac{\delta T^l}{\delta s}$

2. நிரூபிக்க

(i) $\dfrac{\delta^2 T^i}{\delta s^2} = \dfrac{dk}{ds} N^i + k\,(\tau B^i - k T^i)$

(ii) $\dfrac{\delta^2 N^i}{\delta s^2} = \dfrac{d\tau}{ds} B^i - \dfrac{dk}{ds}\, T^i - (k^2+\tau^2)\, N^i$

(iii) $\dfrac{\delta^2 B^i}{\delta s^2} = \tau\,(k T^i - \tau B^i) - \dfrac{d\tau}{ds} N^i$

3. (i) $\varepsilon_{ijl}\ T^i\ \dfrac{\delta T^j}{\delta s}\ \dfrac{\delta^2 T^l}{\delta s^2} = k\tau^2$ எனவும்

(ii) $\varepsilon_{ijl}\ \dfrac{\delta B^i}{\delta s}\ \dfrac{\delta^2 B^j}{\delta s^2}\ \dfrac{\delta^3 B^l}{\delta s^3} = \tau^5 \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{k}{\tau}\right)$ எனவும்

நிரூபிக்க

4. $x^1 = a,\ x^2 = \theta,\ x^3 = c\theta$ என்பன உருளை இலக்கெண் அமைப்பில் கொடுக்கப்பட்ட ஓர் உருளைத்திருகு சுழல் வளைவின் (cylindrical helix) சமன்பாடுகள் ஆகும். அந்த வளைவின் கோட்டம் k ஐயும், முறுக்கம் τ ஐயும் கண்டுபிடிக்க. $\dfrac{k}{\tau}$ ஒரு மாறிலி என நிரூபிக்க. ஒரு நிலைத் திசையுடன் இந்த வளைவின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உள்ள தொடுகோட்டு வெக்டர் மாறாத கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது எனவும் நிரூபிக்க.

5. $y^1 = a\cos\theta,\quad y^2 = a\sin\theta,\quad y^3 = c\,\theta$ (a, c மாறிலிகள்) என்பன ஓர் உருளைத் திருகு சுழலின் தெக்காட்டுச் சமன்பாடுகள் இந்த வளைவுக்கு $\dfrac{k}{\tau}$ ஒரு மாறிலி என நிரூபிக்க.

6. $y^i = y^i\,(s)$ என்பன செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பில் ஒரு வளைவின் சமன்பாடுகள். s என்பது வில்-தூரம்.

$k^2 = [(y^1)^{11}]^2 + y^2)^{11}]^2 + [(y^3)^{11}]^2$ என நிரூபி.

11. தளத்தின் உள்ளார்ந்த வடிவ கணிதம்

ஒரு முப்பரிமாண யூக்லிடின் வெளியில் ஆழ்ந்துள்ள தளங்களின் இயல்புகள் பற்றி இந்த அதிகாரத்தில் விரிவாகக் காண்போம். இந்த இயல்புகள் யாவும் தளங்களின் கோட்டு மூலங்களின் தன்மையைச் சார்ந்தனவேயன்றி தளம் ஆழ்ந்துள்ள வெளியைச் சார்ந்தன அல்ல. அதாவது, இவை தளங்களின் உள்ளார்ந்த இயல்புகள். எனவே, இவ்வியல்புகளின் அடிப்படையில் உருவாக்கப்படும் வடிவகணிதத்தைத் தளங்களின் உள்ளார்ந்த வடிவகணிதம் என்கிறோம்.

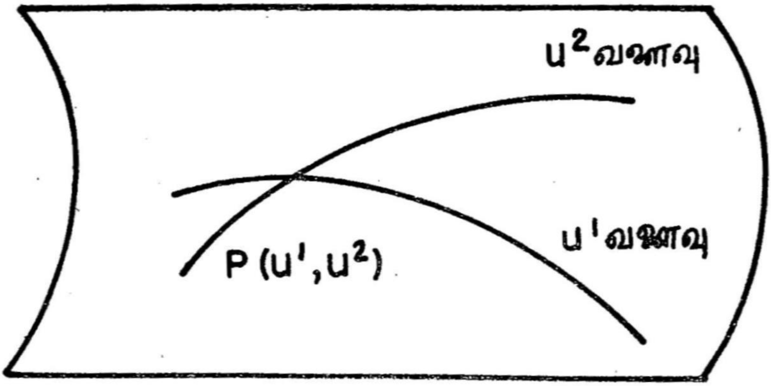
100. தளத்தின் வளைகோட்டிய இலக்கெண்கள்

u^1, u^2 எனும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலாத இரு ஒட்டளவைகளைக் கொண்டு, முப்பரிமாண வெளியில் ஆழ்ந்துள்ள ஒரு தளத்தின் சமன்பாடுகளை,

$$x^i = x^i\,(u^1, u^2)\ \ (i = 1, 2, 3) \qquad \ldots\ldots(100.1)$$

என எழுதலாம். இவ்வதிகாரத்தில் சமன்பாடுகளைச் சுருக்கமாக எழுதுவதற்காக ஒரு புதிய மரபினை ஏற்படுத்துகிறோம். இனி கிரேக்கச் சிறிய எழுத்து சுட்டிணைப்பாகப் பயன்படுத்தப் பட்டால் அது 1, 2 என்ற இரு மதிப்புகளை ஏற்கும் எனக் கொள்வோம்.

இம்மரபின்படி 100.1 ஐ $x^i = x^i\,(u^\alpha)$ என எழுதலாம்.



இனி, u^1, u^2 என்ற இரு எண்கள் அதாவது u^α கொடுக்கப் பட்டால் அவை தளத்தில் ஒரு புள்ளியை தன்னேரில்லாதபடி உறுதி செய்கின்றன. எனவே அவ்வெண்களை அத்தளத்தில் அப் புள்ளியின் இலக்கெண்கள் என்று சொல்லலாம்.

அடுத்து (u^1, u_2) என்ற இலக்கெண்களின் வடிவ கணிதத் தன்மை பற்றி ஆராய்வோம். 100-1 ல் u^2 ஐ மாறிலியாகக் கொண்டால், u^1 மட்டுமே மாறுகிறது. எனவே சமன்பாடுகள் ஒரே ஒட்டளவையுடையதாகின்றன. எனவே அச்சமன்பாடுகள் ஒரு வளைவை வரையறை செய்கின்றன. மேலும் இந்த வளைவு முழுமையாக தளத்தில் படிந்திருக்கும். u^2 க்குப் பல மாறிலி மதிப்புகள் கொடுத்தால் தளத்தின்மேல் ஒரு வளைவுகளின் குடும்பம் (family) கிடைக்கின்றது. இவற்றை u^1 வளைவுகள் என்கிறோம். ஏனெனில் இவற்றின்மேல் u^1 மட்டுமே மாறுகின்றது $u^2 =$ மாறிலி என்பது இவற்றின் சமன்பாடுகள். இதே போன்று u^2 மட்டுமே மாறுகின்ற வளைவுகளின் குடும்பம் ஒன்று தளத்தின்மேல் உண்டு. அவை u^2 வளைவுகள் ஆகும். $u^1 =$ மாறிலி என்பன அவற்றின் சமன்பாடுகள். எனவே தளத்தின்மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு u^1 வளைவும் ஒரு u^2 வளைவும் வெட்டுகின்ற புள்ளி என்பது தெளிவு. இந்த u^1, u^2 வளைவுகளை அந்தப் புள்ளியில் உள்ள இலக்கெண் வளைவுகள் என்கிறோம் (u^1, u^2) என்பனவற்றை தளத்தின் மேலமைந்த வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பாகக் கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு இலக்கெண் வளைவிலும் மாறிகளின் மதிப்புகள் அதிகரிக்கும் திசையை மிகைத்திசையாகக் கொள்கிறோம். மேற்கூறிய வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பிற்கு, நமக்குப் பழக்கமான எடுத்துக்காட்டு ஒரு கோள தளத்தின்மேல் அமைந்த அகலாங்கு, நெட்டாங்கு (latitude and longitude) என்பனவாம்.

குறிப்பு 1: $x^i = x^i(u^\alpha)$ என்பன ஒரு தளத்தின் சமன்பாடுகள். இந்தச் சமன்பாடுகளிலிருந்து u^1, u^2 இவற்றின் மதிப்புகளை x^1, x^2, x^3 என்பனவற்றில் எழுதவேண்டுமெனில்

$$\left[\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{bmatrix} \quad \text{என்னும்}$$

யாக்கோபின் அணி (Jacobian matrix) இரண்டாம் தகுநிலை உடையதாக இருக்கவேண்டும். அவ்வாறு தளத்தின்மேல் உள்ள x^i என்னும் புள்ளியில் இருந்தால் அந்தப் புள்ளியை ஒழுங்கான புள்ளி (regular point) என்கிறோம். அவ்வாறில்லாத புள்ளியை தளத்தின் அருநிலைப் புள்ளி (singularity) என்கிறோம். தளத்தில் அருநிலைப்புள்ளிகள் ஒட்டளவைகளின் தன்மைகளாலும் ஏற்படலாம். (u^1, u^2) என்ற இணைமதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் அவை தளத்தில் ஒரு புள்ளியைத் தன்னேரில்லாதபடி உறுதி செய்கின்றன. ஆயினும் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் u^1, u^2 தன்னேரில்லாதபடி அமைந்திருப்பது அவசியமன்று. எடுத்துக்காட்டாக a ஆரமுள்ள ஒரு கோளத்தின் மேல்தளத்தை

$$x^1 = a \sin u^1 \cos u^2, \quad x^2 = a \sin u^1 \sin u^2, \quad x^3 = a \cos u^1$$

என்ற சமன்பாடுகளால் குறிக்கிறோம். இதனால் ஒரே புள்ளி x^iக்கு u^1, u^2 பல மதிப்புகளை ஏற்கின்றன என்பது தெளிவு. இந்தச் சிக்கலை நீக்க ஒட்டளவைகளின் எல்லைகளை உறுதி செய்கிறோம். மேற்கூறிய எடுத்தக்காட்டில் ஒட்டளவைகளின் எல்லைகளை $0 \leqslant u^1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant u^2 \leqslant 2\pi$ எனத் தீர்மானிக்கலாம். அப்போது கோள தளத்தின் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒரே இணை (u_1, u^2)க்கள் உள்ளன. ஆனால் கோளத்தின் துருவங்கள் இரண்டும், ஒட்டளவைகளின் தன்மையால் ஏற்படும் அருநிலைப் புள்ளிகள் ஆகும். $u^1 = 0$, $u^1 = \pi$ என்பன வளைவுகளைக் குறிப்பதில்லை. அவை துருவங்களைக் குறிக்கின்றன. u^1 அந்த மதிப்புகளை ஏற்கும்போது u^2 தேரா எண் ஆகும்.

நமது ஆய்வில் அருநிலைப் புள்ளிகளை ஒதுக்கிவிடுவோம். புள்ளிகளுக்கும், u^α என்னும் இலக்கெண்களுக்கும் ஒன்றுக்கொன்று தன்னேரில்லாத ஒத்திசைவு உள்ள தளத்தின் பகுதியையே எடுத்துக்கொள்வோமாக. அதாவது தளத்தின் இந்தப் பகுதியில் $u^1 =$ மாறிலி குடும்பத்தைச் சேர்ந்த ஒவ்வொரு வளைவும், $u^2 =$ மாறிலி குடும்பத்தைச் சேர்ந்த ஒவ்வொரு வளைவையும் ஒரே புள்ளியில்தான் வெட்டுகிறது எனக் கொள்கிறோம்.

குறிப்பு 2: ஒட்டளவைகளைக் கொண்டு ஒரு தளத்தின் சமன்பாடுகளை

$$x^i = x^i \ (u^a) \qquad ......(100.1)$$

என எழுதுகிறோம். u^a என்னும் இலக்கெண் அமைப்பு போன்று பல வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்புகளைத் தளத்தின்மேல் உருவாக்க முடியும்.

$$\left.\begin{array}{l} u^1 = u^1 \ (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \\ u^2 = u^2 \ (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \end{array}\right\} \qquad ......(100.2)$$

என்ற சமன்பாடுகளால் ஓர் இலக்கெண் நிலைமாற்றத்தை ஏற்படுத்துவோம். $\bar{u}^a$ என்பன புதிய இலக்கெண்கள்.

$J = \left| \dfrac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^\beta} \right|$ என்னும் யாக்கோப்பின் அணிக்கோவை பூச்சியமில்லாதிருந்தால் $u^a, \bar{u}^a$ க்களுக்கிடையே ஒன்றுக்கொன்று ஒத்திசைவு உள்ளது.

எனவே 100.2 ஐ 100.1 ல் பயன்படுத்த

$x^i = f^i (\bar{u}^1, \bar{u}^2) = f^i (\bar{u}^\alpha)$ என்னும் புதிய சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இவை புதிய இலக்கெண் அமைப்பில் தளத்தைக் குறிப்பிடுகின்றன.

குறிப்பு 3 : ka என்னும் தளத்தின் வளைகோட்டிய இலக்கெண்களை **காசின் இலக்கெண்கள்** (Gaussian coordinates) என்றும் சொல்கிறோம்.

101. முதலாம் அடிப்படை உரு

ஒரு தளத்தின் உள்ளார்ந்த இயல்புகளை அதைச் சுற்றியுள்ள வெளியின் இயல்புகளோடு தொடர்பு படுத்தாமலேயே விளக்க முடியும் என முன்னரே கூறினோம். அவ்வாறு தளத்தின் உள்ளார்ந்த இயல்புகளை ஆராய தளத்தின் அளவைத் தன்மையைக் குறிக்கும் இருபடி வகையீட்டு உரு ஒன்றினை முதலில் நாம் உருவாக்க வேண்டும்.

நாம் இப்போது இரு வேறு வகை மாறிகளைப் பயன்படுத்தப் போகிறோம். யூக்லிடின் முப்பரிமாண வெளி E_3 ல் மாறும் **வெளி மாறிகள்** (Space variables) ஒரு வகை. இவை ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துச் சுட்டிணைப்புகளால் குறிக்கப்படும். அத்தகைய சுட்டிணைப்புகள்

1, 2, 3 என்னும் மூன்று மதிப்புகளை ஏற்கும். மற்றவை தளத்தின் மேல் மாறும் தள மாறிகள் (Surface variables). இவை கிரேக்கச் சுட்டிணைப்புகளால் குறிக்கப்படும். இச்சுட்டிணைப்புகள் 1, 2 என்னும் இரு மதிப்புகளை ஏற்கும்.

ஒரு முப்பரிமாண வெளி E_3 ல் y^i என்பன செங்கோணத் தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் என்க.

$$y^i = y^i\,(u^\alpha) \qquad \ldots\ldots(101.1)$$

என்பன E_3 ல் ஆழ்ந்துள்ள S என்னும் தளத்தின் சமன்பாடுகள் என்க. u^a என்பன S ல் காசின் இலக்கெண்கள் ஆகும்.

S ன் மேல் உள்ள C என்னும் ஒரு வளைவு

$$u^a = u^a\,(t) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2) \qquad \ldots\ldots(101.2)$$

என்ற சமன்பாடுகளால் வரையறை செய்யப்படுகிறது என்க. சுற்றியுள்ள வெளியில் இருந்து பார்க்கும்போது C என்பது E_3 ல் ஒரு வளைவு ஆகும். எனவே அதன் கோட்டு மூலம்

$$(ds)^2 = dy^i\,dy^i \qquad \ldots\ldots(101.3)$$

ஆகும்.

$dy^i = du^\alpha$ என்னும் முரண்மாறி வெக்டர்கள் E_3 வெளியிலும், S தளத்திலும் உள்ள ஒரே இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கின்றன. எனவே அவற்றைத் தொடர்புபடுத்தி

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\,du^\alpha \qquad \ldots\ldots(101.4)$$

என எழுதலாம்.

இதை 100.3 ல் பிரதியிட

$$(ds)^2 = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$$

அடுத்து
$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta} \qquad \ldots\ldots(101.5)$$
என்க.

எனவே

$$(ds^2) = a_{a\beta}\,du^a\,du^\beta \qquad \ldots\ldots(101.6)$$

$a_{\alpha\beta}$ என்பது α, β க்களில் சமச்சீர் உடையது என்பது தெளிவு. மேலும் $(ds)^2$ என்பது ஒரு மாற்றமிலி. எனவே 101.6ல் ஈவு விதியைப் பயன்படுத்தினால், u^a ன் இலக்கெண் நிலைமாற்றங்களைப் பொருத்து $a_{\alpha\beta}$ என்பது ஓர் உடன்மாறி இரண்டாம் அடைவு பண்புரு என முடிவு செய்யலாம்.

$a_{\alpha\beta}$ ஐ அடிப்படைதளப் பண்புரு (fundamental surface tensor) என்றும் தளத்தின் உடன்மாறி அளவைப் பண்புரு என்றும் சொல்கிறோம். மேலும் $a_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta}$ வை தளத்தின் முதலாம் அடிப்படை உரு (first fundamental form) என்கிறோம்.

குறிப்பு: x^i என்பன y^i க்குச் சரியான வளைகோட்டிய இலக்கெண்கள் எனின்,

$$(ds)^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

$$= g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^{\beta}}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} \qquad \ldots\ldots(101.7)$$

எனவே

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^{\beta}} \qquad \ldots\ldots(101.8)$$

102. $\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}}$ என்னும் வெக்டரும், அதன் சிறப்புத் தன்மையும்

நூற்பிரிவு 101 ல் காணப்பட்ட சில சமன்பாடுகளில் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துச் சுட்டிணைப்புகளும், கிரேக்க எழுத்துச் சுட்டிணைப்புகளும் கலந்து வருகின்றன. ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துக்கள் 1, 2, 3 என்னும் மூன்று மதிப்புகளை ஏற்கின்றன; அவை சுற்றியுள்ள வெளியைப் பொருத்து அமைவன. கிரேக்க எழுத்துக்கள் 1, 2 என்னும் இரு மதிப்புகளை ஏற்பன. அவை E_3 ல் ஆழ்ந்துள்ள S என்னும் தளத்தைச் சார்ந்தன. மேலும் dx^i, g^{ij}, g_{ij} என்பன x^i என்னும் வெளிமாறிகளில் ஏற்படும் நிலைமாற்றங்களைப் பொருத்து உருவாகும் பண்புருக்கள். ஆனால் du^{α}, $a_{\alpha\beta}$ என்பன தளத்தில் உள்ள காசின் இலக்கெண்கள் u^{α} க் களில் ஏற்படும் நிலைமாற்றங்களைப் பொறுத்து உருவாகும் பண்புருக்கள்.

சமன்பாடு 101.8 ல் காணப்படும் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் $\frac{\partial x^i}{\partial u^{\alpha}}$ புதுமையானவை. ஏனெனில் அவை இருவகைச் சுட்டிணைப்பு

களையும் பொருத்து அமைவன. இச் சமன்பாட்டில் உள்ள $a_{\alpha\beta}$, g_{ij} இரண்டும் பண்புருக்கள் ஆதலால், இச் சமன்பாட்டின்படி $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ ஐ ஒரு முரண்மாறி வெளி வெக்டர் என்றோ அல்லது ஓர் உடன்மாறித் தள வெக்டர் என்றோ கொள்ளலாம். இதுபற்றி சற்று விரிவாக ஆராய்வோம்.

S என்னும் தளத்தில் du^α என்னும் தளவெக்டரால் கொடுக்கப் படும் சிறிய இடப்பெயர்ச்சியை எடுத்துக் கொள்வோம். அதே இடப்பெயர்ச்சியை dx^i என்னும் வெளிவெக்டராலும் குறிக்கிறோம். மேலும் அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொடர்பு பின்வருமாறு :

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\, du^\alpha$$

இச்சமன்பாட்டில் இடது பக்கமுள்ள உருப்படி கிரேக்கச் சுட்டிணைப்புகளின் சார்பிலாதது. எனவே தள இலக்கெண்கள் u^α மாறும்போது dx^i ஒரு மாற்றமிலியாகும். தளத்தில் ஏற்படும் மாறுதல்களைப் பொருத்து மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் ஈவு விதியை பயன்படுத்தினல் $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ ஓர் உடன்மாறித் தளவெக்டர் என முடிவிற்கு வருகிறோம். இதே போன்று du^α என்னும் தளவெக்டர், வெளி இலக்கெண்கள் x^i மாறும்போது மாற்றமிலியாகும். எனவே வெளியில் ஏற்படும் மாறுதல்களைப் பொருத்து $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ ஒரு முரண்மாறி வெளி வெக்டர் என்று முடிவு செய்கிறோம்.

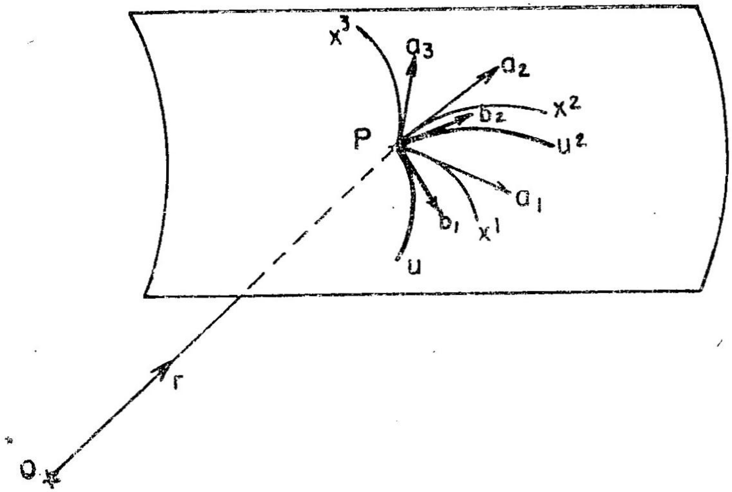
இனி $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ வை x^i_α எனக் குறிப்பிடுவோமாக. இத்தப் புதிய குறியீட்டில் சுட்டிணைப்புகள் அந்தப்பண்புருவின் சரியான தன்மையைக் குறிப்பிடுகின்றன.

எனவே 101.8 ஐ

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij}\, x^i_\alpha\, x^j_\beta \qquad \ldots\ldots(102.1)$$

என எழுதலாம்.

103. x^i_α ன் வடிவ கணித விளக்கம்



S என்னும் தளத்தின் மேல் உள்ள யாதாமொரு புள்ளி P ன் அமைநிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$ என்க. P ன் அமைநிலை (u^1, u^2) என்னும் காசின் இலக்கெண்களாலோ அல்லது (x^1, x^2, x^3) என்னும் வெளி இலக்கெண்களாலோ கொடுக்கப்படலாம். இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு $x^i = x^i\,(u^\alpha)$ என்னும் சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படும். எனவே x^i ன் சார்பாக உள்ள $\mathbf{r}$ ஐ u^α ன் சார்பாகவும் கொள்ளலாம்.

$$\text{ஆக } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \qquad \ldots\ldots(103.1)$$

ஆனல் $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$ என்பன P ல் வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பு X உடன் தொடர்புள்ள அடிப்படை வெக்டர்கள் $\mathbf{a}_i$ என்பன ஆகும். அதாவது $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = \mathbf{a}_i$ இதே போன்று $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}$ என்பன P ல் காசின் அமைப்பு U உடன் தொடர்புள்ள அடிப்படை வெக்டர்கள் $\mathbf{b}_\alpha$ என்பனவாகும். அதாவது $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} = \mathbf{b}_\alpha$

எனவே 103·1 ஐ

$$\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{a}_i \, x^i_\alpha \qquad \ldots\ldots(103.2)$$

என எழுதலாம். எனவே x^i_α என்பன $\mathbf{a}_i$ என்னும் அடிப்படை வெக்டர்கள் அமைந்த வெளி இலக்கெண் அமைப்பில் $\mathbf{b}_\alpha$ என்னும் தள அடிப்படை வெக்டர்களின் முரண்மாறிக் கூறுகள் ஆகும். இதுவே x^i_α ன் வடிவகணித விளக்கம்.

அடுத்து $\mathbf{a}_1 = x^i_1 \, \mathbf{b}_i \; , \; \mathbf{a}_2 = x^i_2 \, \mathbf{b}_i$

எனவே
$$x^i_1 = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u_1}, \frac{\partial x^2}{\partial u_1}, \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\right)$$

$$x^i_2 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}, \frac{\partial x^2}{\partial u^2}, \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)$$

என்பன x^i என்னும் வெளி இலக்கெண்களின் நிலைமாற்றத்தின் போது முரண்மாறித் தன்மையோடு மாறுகின்றன. எனவே x^i_α முரண்மாறி வெளி வெக்டராகும்.

மேலும் பின்வரும் மூன்று தள வெக்டர்கள்

$$x^i_\alpha = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\right), \quad x^2_\alpha = \left(\frac{\partial x^2}{\partial u^1}, \frac{\partial u^2}{\partial u^2}\right),$$

$$x^3_\alpha = \left(\frac{\partial x^3}{\partial u^1}, \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)$$

என்பன, u^α என்னும் தள இலக்கெண்களைப் பொருத்து உடன் மாறித் தன்மையுடையன என நிரூபிக்கலாம். எனவே x^i_α தளத்தில் u^α வைப் பொருத்த ஓர் உடன்மாறித்தள வெக்டர் ஆகும்.

குறிப்பு 1: $a_{\alpha\beta}$ என்பது அடிப்படை உடன்மாறித் தள வெக்டர் ஆகும்.

இனி, $\left| a_{\alpha\beta} \right| = a$ என்க

$$a^{\alpha\beta} = \frac{|a_{\alpha\beta}| \text{ ல் } a_{\alpha\beta} \text{ ன் இணைச்சினை}}{a} \qquad \ldots\ldots(103.3)$$

நூற்பிரிவு 40 ன்படி $a^{\alpha\beta}$ ஓர் இரண்டாம் அடைவு சமச்சீர் முரண்மாறிப் பண்புரு ஆகும். இது அடிப்படைத் தளப் பண்புரு வின் இணையிய பண்புருவாகும்.

மேலும் 40 ன்படி

$$a_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\theta} = \delta^{\theta}_{\beta} \qquad \ldots\ldots(103.4)$$

அடுத்து $$a = |a_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

[ஏனெனில் அடிப்படை
உருமிகை—உறுதி உடையது

$$= a_{11}\, a_{22} - a^{2}_{12} \quad [\because a_{21} = a_{12}]$$

மேலும் $$a^{\alpha\beta} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

எனவே $a^{11} = \dfrac{a_{22}}{a}$, $a^{12} = a^{12} = -\dfrac{a_{12}}{a}$

$$a^{22} = \frac{a_{11}}{a}$$

குறிப்பு 2: S என்னும் இருபரிமாண தளத்தில் பின்வரும் சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படும் $e_{\alpha\beta}$, $e^{\alpha\beta}$ என்னும் வரிசை மாற்றுப் பண்புருக்களை வரையறை செய்கிறோம்.

$e_{11} = e_{22} = e^{11} = e^{22} = 0$

$e^{12} = e_{12} = +1$

$e^{21} = e_{21} = -1$

மேலும் $\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\; e_{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\, e^{\alpha\beta}$

என்றும் வரையறை செய்வோம்.

குறிப்பு 3: $\dfrac{du^{\alpha}}{dt}$ என்பது $u^{\alpha} = u^{\alpha}(t)$ என்னும் வளைவிற்கு a^{α} என்னும் புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டு வெக்டர்

ஆகும். இதன் வெளிக்கூறுகள் $\dfrac{dx^i}{dt}$ பின்வரும் சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படுகின்றன.

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{du^\alpha}{dt} = x^i_\alpha \frac{du^\alpha}{dt} \qquad \ldots\ldots(103.5)$$

$\dfrac{du^\alpha}{dt}$ என்பன கொடுக்கப்பட்டால் மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\dfrac{dx^i}{dt}$ களைத் தன்னேரில்லாதபடி கண்டு பிடிக்கலாம். $\dfrac{dx^i}{dt}$ கள் கொடுக்கப்பட்டால் 103. 5 பயன்படுத்தும் போது இரண்டு தெரியாத $\dfrac{du^\alpha}{dt}$ க்களுக்கு மூன்று சமன்பாடுகள் உள்ளன. எனவே தீர்வு தன்னேரில்லாதபடி அமைய வேண்டுமானல் வெக்டர் $\dfrac{du^\alpha}{dt}$ தளத்தின் மேல் படிய வேண்டும்.

g_{ij} என்னும் அடிப்படைப் பண்புருவோடு தொடர்பு கொண்ட வெளியின் இயல்புகளை முன் அதிகாரங்களில் கற்ருேம். அதே போன்று $a_{\alpha\beta}$ என்னும் அடிப்படைத் தளப் பண்புருவோடு தொடர்பு கொண்ட தளத்தின் இயல்புகளைக் காண்போம். இவ்விரு இயல்புகளும் ஒத்த தன்மையுடையன.

104. வளைவின் நீளம்

t ஐ ஒட்டளவையாகக் கொண்டு, ஒரு தளத்தின் மேல் உள்ள ஒரு வளைவை

$$u^\alpha = u^\alpha(t) \qquad \ldots\ldots(104.1)$$

என்ற சமன்பாடுகளால் குறிக்கிருேம். தளத்தில் அடிப்படை அளவை உரு,

$$(ds)^2 = a_{\alpha\beta}\; du^\alpha \; du^\beta \qquad \ldots\ldots(104.2)$$

எனவே $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a_{\alpha\beta}\,\frac{du^\alpha}{dt}\,\frac{du^\beta}{dt}$$

அதாவது $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{a_{\alpha\beta} \dfrac{du^{a}}{dt} \dfrac{du^{\beta}}{dt}}$

எனவே $t=t_1$, $t=t_2$ என்பனவற்றிற்குச் சரியான புள்ளிகளுக் கிடையே உள்ள வளைவின் நீளம் s, பின்வருமாறு :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a_{\alpha\beta} \frac{du^{\alpha}}{dt} \frac{du^{\beta}}{dt}} \; dt \qquad \ldots\ldots(104.3)$$

105. தள வெக்டரின் நீளம் அல்லது அளவு

A^{α} என்பது ஒரு தள வெக்டர் களம் என்க. தளத்தின் ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் A^{α} கொடுக்கப்பட்டால், $\dfrac{du^{\alpha}}{dt} = A^{\alpha}$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் வகையில் $u^{\alpha} = u^{\alpha}(t)$ என்னும் தன்னேரில்லாத வளைவை நம்மால் அந்தத் தளத்தில் அமைக்க முடியும். எனவே A^{α} அந்த வளைவிற் குத் தளத் தொடுகோட்டு வெக்டர் ஆகிறது. A^{i} ஒன்பன அதன் வெளிக் கூறுகள் எனின்

$$A^{i} = x^{i}_{\alpha} A^{\alpha} \qquad \ldots\ldots(105.1) \; [103.5 \text{ ன்படி}]$$

வெக்டர் A^{i} ன் அளவு A எனில்

$$\begin{aligned}(A)^2 &= g_{ij} A^{i} A^{j} \\ &= g_{ij} x^{i}_{\alpha} A^{\alpha} x^{j}_{\beta} A^{\beta} \\ &= g_{ij} x^{i}_{\alpha} x^{j}_{\beta} A^{\alpha} A^{\beta}\end{aligned}$$

$$(A)^2 = a_{\alpha\beta} A^{\alpha} A^{\beta} \qquad \ldots\ldots(105.2)$$

105.2 தளத்தில் வெக்டர் A^{α} ன் அளவைத் தருகின்றது.

குறிப்பு : 104.2ன் படி

$$a_{\alpha\beta} \frac{du^{\alpha}}{ds} \cdot \frac{du^{\beta}}{ds} = 1 \qquad \ldots\ldots(105.3)$$

இங்கு வில்தூரம் s என்பதை ஒட்டளவையாகக் கொள்கிறோம்.

எனவே $\frac{du^\alpha}{ds}$ என்பதின் அளவு 1. அதாவது $\frac{du^\alpha}{ds}$ என்பது தளத்தில் அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் ஆகும்.

106. இரு வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம்

U^i, V^i, என்பன இரு அலகு வெளி வெக்டர்கள் என்க. அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணம் θ எனில்

$$\cos\theta = g_{ij}\, U^i\, V^j$$

$$= g_{ij}\, x^i_\alpha\, x^j_\beta\, U^\alpha\, V^\beta$$

$$\therefore \cos\theta = a_{\alpha\beta}\, V^\alpha\, V^\beta \qquad \text{......(106.1)}$$

எனவே, இரு அலகுத் தள வெக்டர்கள் $U^\alpha\ V^\beta$ இவற்றிக்கிடையே உள்ள கோணம் θ, சூத்திரம் 106.1 ஆல் தரப்படுகிறது.

இதிலிருந்து இருதள வெக்டர்கள் A^α, B^β என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதற்குத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடுகள்

$$a_{\alpha\beta}\, A^\alpha\, B^\beta = 0 \qquad \text{......(106.2)}$$

எனக் கிடைக்கின்றது.

குறிப்பு : 105.2, 106.1, 106.2 ல் உள்ள சூத்திரங்கள் நமக்குப் பழக்கமான உருவங்களில் உள்ளன. இதைப் போன்ற சூத்திரங்களை நாம் வெளி வடிவ கணிதத்தில் கண்டுள்ளோம். இப்போது அச்சூத்திரங்களில் வெளி வெக்டரையும், வெளி அடிப்படைப் பண்புருவையும் தளவெக்டராலும் தள அடிப்படைப் பண்புருவாலும் மாற்றீடு செய்வதால் இந்த உருக்கள் கிடைக்கின்றன. எனவே, வெளிப் பண்புருக்களில் g_{ij}, g^{ij} களால் பெருக்கும்போது சுட்டிணைப்பு 'ஏற்றம்' 'இறக்கம்' செய்வதே போன்று தளப் பண்புருக்களிலும் $a_{\alpha\beta}$ $a^{\alpha\beta}$ க்களைச் செயல்படுத்தும்போது சுட்டிணைப்பு 'ஏற்ற இறக்கம்' செய்யலாம்.

முடிவு 1: U^{α}, V^{α} என்னும் இரு அலகு வெக்டர்களுக்கு இடையே உள்ளகோணம் θ எனில்

$$\sin \theta = +\varepsilon_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}\, V^{\beta} .$$

நிருபணம்: θ என்பது $U^{\alpha}\, V^{\alpha}$ என்னும் இரு அலகு வெக்டர் களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் எனில்

$$\cos \theta = a_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}\, V^{\beta}$$

எனவே $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$= 1 - a_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}\, V^{\beta}\, a_{r\delta}\, U^{r}\, V^{\delta} \qquad \text{......(106.3)}$$

U^{α}, V^{α} என்பன அலகு வெக்டர் ஆதலின்

$$a_{\alpha r}\, U^{\alpha}\, U^{r} = 1,\; a_{\beta\delta}\, V^{\beta}\, V^{\delta} = 1$$

106.3 ல் பிரதியிட

$$\sin^2\theta = a_{\alpha r}\, U^{\alpha}\, U^{r}\; a_{\beta\delta}\, V^{\beta} V^{\delta} - a_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}\, V^{\beta}\, a_{r\delta}\, U^{r}\, V^{\delta}$$

$$= (a_{\alpha r}\; a_{\beta\delta} - a_{\alpha\beta}\; a_{r\delta})\; U^{\alpha}\; U^{r}\; V^{\beta}\, V^{\delta}$$

$$= a\, e_{\alpha\delta}\, e_{r\beta}\; U^{\alpha}\, U^{r}\; V^{\beta}\, V^{\delta}$$

$$= \varepsilon_{\alpha\delta}\; \varepsilon_{r\beta}\; U^{\alpha}\, U^{r}\; V^{\beta}\, V^{\delta}$$

$$= (\varepsilon_{\alpha\delta}\, U^{\alpha}\, V^{\delta})^2$$

இருபக்கமும் வர்க்க மூலம் காணும்போது + குறி எடுப்பதா அல்லது — குறியெடுப்பதா என்னும் சந்தேகம் எழுகிறது. எனவே + குறியீட்டையே கொள்வதாக மரபு ஏற்படுத்திக்கொள்கிறோம். இம்மரபுப்படி

$$\sin \theta = +\varepsilon_{\alpha\delta}\, U^{\alpha}\, V^{\delta} = +\varepsilon_{\alpha\,\beta} U^{\alpha}\, V^{\beta} \qquad \text{......(106.4)}$$

(போலிச் சுட்டிணைப்பு δவை β ஆக மாற்ற)

குறிப்பு 1: இப்பொழுது ஏற்படுத்திய மரபின்படி மாற்றமிலி $\varepsilon_{\alpha\beta}\, U^{\alpha}\, V^{\beta}$ மிகைத் தன்மையுடையதாக இருந்தால் U^{α} லிருந்து V^{β} க்கு சுழற்சி மிகைத் திசையில் உள்ளது எனக் கொள்கிறோம்.

அதாவது U^{α} ல் இருந்து V^{β} க்கு சுழலும் போது கோணம், πயை விடக் குறைவாக உள்ள திசையை மிகைத்திசை எனக் கொள்கிறோம்.

குறிப்பு 2: U^{α}, V^{β} என்னும் அலகு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதற்குத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடு

$$|\varepsilon_{\alpha\beta}\ U^{\alpha} V^{\beta}| = 1.$$

முடிவு 2: U_{α} ஓர் அலகு வெக்டர் எனில்,

$$V^{\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta}\ U_{\alpha} \qquad \text{......(106.5)}$$

என்னும் சமன்பாடு, U^{α} க்கு செங்குத்தாகவும், U^{α} ல் இருந்து V^{α} க்குச் சுழலும் திசை மிகைத் திசையாகவும் அமைந்துள்ள அலகு வெக்டர் V^{β} ஐ வரையறை செய்கிறது.

நிரூபணம்: $V^{\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta}\ V_{\alpha}$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். V^{β} ன் நீளம் V எனில்

$$(V)^2 = a_{\alpha\beta}\ V^{\alpha}\ V^{\beta}$$

$$= a_{\alpha\beta}\ \varepsilon^{r\alpha}\ {}_3{}^{\delta\beta}\ U_r\ U_{\delta}$$

$$= a_{11}\ (\varepsilon^{21})^2\ (U_2)^2 + 2a_{12}\ \varepsilon^{12}\ \varepsilon^{21}\ U_1 U_2 + a_{22}\ (\varepsilon^{12})^2\ (U_1)^2$$

$$= \frac{1}{a}\left[a_{22}\ U_2{}^2 - 2a^{12}\ U_1\ U_2 + a_{11}\ U_2^{\ 2}\right]$$

$$= a^{11}\ U_1{}^2 + 2a^{12}\ U_1\ U_2 + a^{22} U_2{}^2$$

$$= a^{\alpha\beta}\ U_{\alpha}\ U_{\beta} = 1 \quad [\because U_{\alpha} \text{ ஓர் அலகு வெக்டர்}]$$

எனவே V^{β} ஓர் அலகு வெக்டர் ஆகும்.

மேலும் U^{χ}, V^{α} இவற்றிற்கிடையே கோணம் θ எனின்

$$\sin\theta = \varepsilon_{\alpha\beta}\ U^{\alpha}\ V^{\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta}\ U_{\alpha}\ V_{\beta} = V^{\beta}\ V_{\beta} \quad \text{106.5 ன்படி}$$

$$= 1 \ (\because V.^{\beta} \text{ ஓர் அலகு வெக்டர்})$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

மேலும் மரபின் படி V^{α} என்னும் வெக்டர் U^{α} க்கு செங்குத்தாக இருப்பதற்கு U^{α} லிருந்து V^{α} க்கு மிகைத் திசையில் சுழல வேண்டும். இதுவே வேண்டும் முடிவு.

முடிவு 3 : ω என்பது இலக்கு வளைவுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் எனில் $\sin\omega = \sqrt{\dfrac{a}{a_{11}a_{22}}}$ ......(106.6)

u^1 என்னும் இலக்கு வளைவின் ஊடே, $u^2 =$ மாறிலி, எனவே $du^2 = 0$.

$\therefore$ u^1 வளைவு வழியே கோட்டு மூலம்

$$(ds)^2 = a_{11}\,(du^1)^2$$

$$\text{ஆக } \frac{du^1}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}$$

எனவே u^1 வளைவு வழியே அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர்

$$\left(\frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,\delta^{\alpha}_{1},\ \text{ஆகும்}$$

இது போன்றே $\dfrac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\delta^{\alpha}_{2}$ என்பது u^2. வளைவு வழியே அதகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் ஆகும்.

எனவே, ω அவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணம் எனின்,

$$\sin\omega = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,\delta^{\alpha}_{1}\,\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\delta^{\beta}_{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}}}\;\varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{a}\,c^{12}}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}}}$$

$$\therefore\quad \sin\omega = \sqrt{\frac{a}{a_{11}\,a_{22}}} \qquad \text{......(106.6)}$$

மேலும், $\cos^2\omega = 1 - \sin^2\omega$

$$= 1 - \frac{a}{a_{11}\,a_{22}}$$

$$= \frac{a_{11}\,a_{22} - a}{a_{11}\,a_{22}} = \frac{a_{12}{}^2}{a_{11}\,a_{22}}$$

$$\therefore\quad \cos\omega = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}}} \qquad \text{......(106.7)}$$

எனவே தளத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும், இலக்கு வளைவுகள் u^1, u^2 இரண்டும் செங்குத்தாக அமையத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடு, எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $a_{12}=0$ என்பதாம். இலக்கு வளைவுகள் செங்குத்தாக இருக்கும் போது இலக்கெண் அமைப்பைச் செங்கோண வளைகோட்டிய அமைப்பு என்கிறோம்.

107. சம அளவைத் தளங்கள் (Isometric Surfaces)

ஒரு தளத்தின் இயல்புகளில் $(ds)^2=a_{\alpha\beta}\ du^\alpha\ du^\beta$ என்னும் முதலாம் அடிப்படை உருவின் பாற்பட்ட இயல்புகளையே இது வரை கவனித்தோம். இவை அந்தத் தளத்தின் உள்ளார்ந்த வடிவ கணித இயல்புகள். தளத்தைச் சூழ்ந்துள்ள வெளியில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து நோக்கும் போது தோன்றும் இயல்புகளை நாம் கவனிக்கவில்லை. சூழ்ந்துள்ள வெளியில் இருந்து பார்க்கும்போது உருளை, கூம்பு இவற்றின் தளங்கள் முற்றிலும் மாறுபட்டனவாகத் தோன்றுகின்றன. இருப்பினும் அவற்றின் உள்ளார்ந்த வடிவ கணித இயல்புகளில் வேறுபாடு இல்லை. ஏனெனில் உருளை, கூம்பு இவற்றின் அளவை இயல்புகள் ஒரே கோட்டு மூலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டவை. அவ்வாறு உள்ள தளங்களை 'சம அளவைத் தளங்கள்' என்கிறோம்.

வரையறை: "இரு தளங்களின் கோட்டு மூலங்கள் சமம் ஆகுமாறு அதாவது ஒரே அளவைக்கெழுக்கள் $a_{\alpha\beta}$ உடையனவாக உள்ளவாறு ஒவ்வொரு தளத்தின் மேலும் ஓர் இலக்கெண் அமைப்பு இருக்குமானால் அவை **சம அளவைத் தளங்கள்** (Isometric surface) ஆகும்.

உருளையும் கூம்பும் ஒன்றுக்கொன்று சம அளவைத் தளங்களாக இருப்பதுடன், அவை யூக்லிடின் சமதளத்துடன் 'சம அளவை' உடையனவாக இருப்பது தெளிவு; ஏனெனில் அவற்றை அவற்றின்மேல் உள்ள வளைவுகளின் வில்தூரங்களில் எவ்வித மாறுதல்களுமின்றி சமதளத்தில் விரித்துப் பரப்ப முடியும்.

இவ்வாறு சமதளத்தில் விரித்துப் பரப்பக் கூடிய தளங்களை **பரத்தல் தன்மை** (developable) யுடைய தளங்கள் என்கிறோம். அத்தகைய தளங்கள் யூக்லிடின் சமதளத்தோடு 'சம அளவை' யுடையனவாக இருக்கின்றன. ஒரு தளம் 'பரத்தல் தன்மை' உடையதா என்றறிய சோதனையை, பின்னர் நூற்பிரிவு 109 ல் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு : பரத்தல் தன்மையற்ற இரு 'சம அளவை' த் தளங்களுக்குப் பின்வரும் S_1, S_2 தளங்கள் எடுத்துக் காட்டாகும்.

$$S_1: \quad y^1 = v^1 \cos v^2$$
$$y^2 = v^1 \sin v^2$$
$$y^3 = a \cosh^{-1} \frac{v^1}{a} \qquad \text{......(107.1)}$$

இது சங்கிலி வளைவு (catenary) $y^2 = \cosh \frac{y^3}{a}$, Y^3 அச்சைச் சுற்றி சுழலுவதால் ஏற்படும் சங்கிலி வளைத்திண்மத்தின் (catenoid) தளம்

$$S_2, \quad y^1 = u^1 \cos u^2$$
$$y^2 = u^1 \sin u^2$$
$$y^3 = a\, u^2 \qquad \text{......(107.2)}$$

இது திருகு சுழல் வளைத்திண்மத்தின் (helicoid) தளம்.

S_1 ன் மேல் $(ds)^2 = dy^i\, dy^i$

எனவே $(ds)^2 = a_{\alpha\beta}\, dv^\alpha\, dv^\beta$

$$= \frac{(v^1)^2}{(v^1)^2 - a^2} (dv^1)^2 + (v^1)^2 (dv^1)^2 \qquad \text{......(107.3)}$$

இது போன்றே S_2 தளத்தின் மேல்

$$(ds)^2 = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = (du^1)^2 + [a^2 + (u^1)^2]\,(du^2)^2 \qquad (107.4)$$

எனவே 107.3ல்

$(v^1)^2 - a^2 = (u^1)^2$, $v^2 = u^2$ என பிரதியிட

S_1 ன் மேல்

$$(ds)^2 = (du^1)^2 + [(u^1)^2 + a^2]\,(du^2)^2$$

எனக் கிடைக்கின்றது. எனவே s_1 ம் s_2 ம் 'சம அளவை' உடையன.

108. தளத்தில் உடன் மாறி வகையிடல் (Surface Covariant differentiation)

g_{ij} ல் தொடங்கி அதன் பகுதி வகைக்கெழுக்களின் சேர்க்கைகளினுல் கிறித்தஃபல் குறியீடுகளை அமைத்தது போன்று அடிப்படைத் தளப் பண்புரு $a_{\alpha\beta}$ ன் பகுதி வகைக்கெழுக்களின்

சேர்க்கைகளினுலும் கிறித்தஃபல் குறியீடுகளை அமைக்கலாம். இந்த இருவகைக் கிறித்தஃபல் குறியீடுகளினுல் எவ்விதக் குழப்பமும் நேராது. ஏனெனில் g_{ij} லிருந்து அமைக்கப்பட்ட குறியீடுகள் ஆங்கிலச் சிறிய எழுத்துச் சுட்டிணைப்புகளையும், $a_{\alpha\beta}$ ல் இருந்து அமைக்கப்பட்ட குறியீடுகள் கிரேக்கச் சுட்டிணைப்புகளையும் கொண்டிருப்பன. ஆகவே இருவகைக் குறியீடுகளையும் கண்டு கொள்வது எளிது.

அடுத்து, முன்போலவே உடன்மாறி வகைக்கெழுக்களையும், உள்ளார்ந்த வகைக் கெழுக்களையும் தளத்தில் அறிமுகப் படுத்துகிறேம்.

$A_{\alpha,\beta}$ என்பது u^{β} ஐப் பொருத்து A_{α} ன் உடன்மாறி வகைக் கெழுவானுல்

$$A_{\alpha,\beta} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A_{\varepsilon} \qquad \ldots\ldots(108.1)$$

அடுத்து அதன் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு $\frac{\delta A_{\alpha}}{\delta t}$ பின்வருமாறு :

$$\frac{\delta A_{\alpha}}{\delta t} = A_{\alpha,\beta}\frac{du^{\beta}}{dt} = \left[\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A_{\varepsilon}\right]\frac{du^{\beta}}{dt}$$

$$= \frac{dA_{\alpha}}{dt} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A_{\varepsilon}\frac{du^{\beta}}{dt} \qquad \ldots\ldots(108.2)$$

இவை போன்றே உயர் அடைவு வகைக்கெழுக்களையும் எழுதலாம்.

அடுத்து $a_{\alpha\beta}$ ல் இருந்து $R^{\alpha}_{\cdot\beta r\delta}$ என்னும் ரீமான்-கிறித்தஃபல் தளப்பண்புருவையும், $R_{\alpha\beta r\delta}$ என்னும் கோட்டத்தளப் பண்புருவையும் அமைக்கலாம்.

முன்போலவே

$$R^{\alpha}_{\cdot\beta r\delta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{r}} & \frac{\partial}{\partial x^{\delta}} \\ \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta r \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\delta \end{Bmatrix} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ tr \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \alpha \\ t\delta \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \beta r \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \beta\delta \end{Bmatrix} \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots(108.3)$$

மேலும் $$R_{\alpha\beta r\delta} = a_{\alpha\sigma}\, R^{\sigma}_{.\beta r\delta} \qquad \text{......(108.4)}$$

$R_{\alpha\beta r\delta}$, முன்னிரண்டு, பின்னிரண்டு சுட்டிணைப்புகளில் எதிர் சீர் உடையது என நமக்குத் தெரியும்.

எனவே தளத்தில்

$$\left.\begin{aligned} R_{\alpha\alpha\beta r} &= R_{\alpha\beta rr} = 0 \\ R_{1212} &= R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221} \end{aligned}\right\} \text{......(108.5)}$$

எனவே ரீமான் பண்புருவின் பூச்சியமாகாத ஒவ்வொரு கூறும் R_{1212} அல்லது $-R_{1212}$ க்குச் சமம் ஆகும்.

அடுத்து $a = |a_{\alpha\beta}|$ எனில் K என்னும் அளவை பின்வரும் சமன்பாட்டால் வரையறை செய்கிறோம்.

$$K = \frac{R_{1212}}{a} \qquad \text{......(108.6)}$$

அதாவது $R_{1212} = aK$

எனவே இந்தச் சமன் பாட்டை

$$R_{\alpha\beta r\delta} = K\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, \varepsilon_{r\delta} \quad \text{என எழுதலாம்}$$

இரு பக்கங்களையும் $\varepsilon^{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{r\delta}$ ஆல் பெருக்க

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta}\, \varepsilon^{r\delta}\, R_{\alpha\beta r\delta} &= K\left(\varepsilon^{\alpha\beta}\, \varepsilon_{\alpha\beta}\right)\left(\varepsilon^{r\delta}\, \varepsilon_{r\delta}\right) \\ &= K \cdot 2.\, 2 \end{aligned}$$

எனவே $$K = \tfrac{1}{4} R_{\alpha\beta r\delta}\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, \varepsilon^{r\delta} \qquad \text{......(108.7)}$$

இதிலிருந்து K ஒரு மாற்றமிலி என்பது தெளிவு. இந்த மாற்றமிலி K ஐ தளத்தின் 'முழுக்கோட்டம்' (Total Curvature) அல்லது 'காசின் கோட்டம்' (Gaussian Curvature) என்கிறோம். $a_{\alpha\beta}$ அதன் வகைக்கெழுக்கள் இவற்றாலேயே K வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளதால் K ஆல் விளக்கப்படும் இயல்கள் யாவும் தளத்தின் உள்ளார்ந்த இயல்புகளே.

109. முடிவு !

S என்னும் ஒரு தளம் பரத்தல் தன்மை உடையதாக இருப்பதற்குத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடு தளத்தின் ரீமான்—கிறித்தஃபல் பண்புரு பூச்சியமாவதே, அதாவது S ன் காசின் கோட்டம் பூச்சியமாவதே.

நிரூபணம்: S பரத்தல் தன்மையுடையது என்க. அதாவது அது யூக்லிடின் சமதளத்துடன் 'சம அளவை' உடையது. எனவே ஓர் இலக்கெண் அமைப்பில் $a_{11}=a_{22}=1$, $a_{12}=0$ ஆக இருக்க வேண்டும். ஆக அந்த அமைப்பில் $R_{\alpha\beta r\delta}=0$ ஆதாவது $K=0$. இது பண்புருச் சமன்பாடு ஆதலின் எவ்லா இலக்கெண் அமைப்புகளிலும் $R_{\alpha\beta r\delta}=0$ அதாவது $K=0$. எனவே இந்தக் கட்டுப்பாடு தேவை.

மாருக $R_{\alpha\beta r\delta}=0$ என்க.

எனவே $A_{\beta,r\delta}=A_{\beta,\delta r}$ அதாவது S ஒரு தெக்காட்டின் அமைப்பை ஏற்றுக்கொள்கிறது. எனவே யூக்லிடின் சமதளத்துடன் 'சம அளவை' உடையது. எனவே இந்தக்கட்டுப்பாடு போதுமானது.

110. ஐன்ஸ்டீன் கோட்டம் (Einstein Curvature)

வெளியைப் போலவே தளத்திலும், பின்வரும் சமன்பாட்டிஞல் ரிசி பண்புருவை வரையறை செய்கிறோம்.

$$R_{\beta r}=R^{\alpha}_{\cdot\,\beta r\alpha}=a^{\lambda\alpha}\;R_{\lambda\beta r\alpha} \qquad \ldots\ldots(110.1)$$

$R_{\beta r}$ என்னும் குறுக்கம் ரிசி பண்புருவாகும்.

அடுத்து $R=a^{\beta r}\;R_{\beta r}$ ......(110.2)

என்னும் மாற்றமிலியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

110.1 ஐ $a^{\beta r}$ ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$a^{\beta r}\;R_{\beta r}=a^{\beta r}\;a^{\lambda\alpha}\;R_{\lambda\beta r\alpha} \qquad \ldots\ldots(110.3)$$

$$\therefore\quad R=a^{\beta r}\;a^{\lambda\alpha}\;R_{\lambda\beta r\alpha}$$

108.5 ஐப் பயன்படுத்தி இதை

$$R=-2\,R_{1212}\,(a^{11}\,a^{22}-a^{12}\,a^{12}) \qquad \ldots\ldots(110.4)$$

என எழுதலாம்.

ஆனுல் $a^{11}=\dfrac{a_{22}}{a}$, $a^{22}=\dfrac{a_{11}}{a}$, $a^{12}=-\dfrac{a_{12}}{a}$

110.4 ல் பிரதியிட

$$R = -2\,\frac{R_{1212}}{a}.$$

எனவே $$R = -2K$$

இந்த R என்னும் மாற்றமிலியை தளத்தின் ஐன்ஸ்டீன் பண்புரு என்கிறோம்.

111. தளத்தில் குறுக்கடிகள்

நூற்பிரிவு 76 ல் ஒரு வெளியில் குறுக்கடிகளை வரையறை செய்து, அவற்றின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளையும் கண்டுபிடித்தோம். அதே வரையறை ஒரு தளத்திலுள்ள குறிக்கடிகளுக்கும் பொருந்தும். நூற்பிரிவு 77 ல் கடைப்பிடித்த முறையைப் பின்பற்றியே தளத்தில் குறுக்கடிகளின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்,

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{du^{\alpha}}{ds}\right) = \frac{d^2u^{\alpha}}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\, r\end{Bmatrix}\frac{du^{\beta}}{ds}\cdot\frac{du^{r}}{ds} = 0 \qquad \ldots\ldots(111.1)$$

என நிரூபிக்கலாம்.

மேலும், 77.3 க்குச் சரியாக தளத்தில் குறுக்கடிகள்

$$a_{\alpha\beta}\,\frac{du^{\alpha}}{ds}\cdot\frac{du^{\beta}}{ds} = 1 \qquad \ldots\ldots(111.2)$$

என்னும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றன.

111.1 ல் கொடுக்கப்பட்ட இரு சமன்பாடுகளையும் பயன்படுத்தி குறுக்கடிகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம். ஆனால் குறுக்கடிகளை எளிதாகக் கண்டுபிடிக்க 111.1 ல் ஒரு சமன்பாட்டையும் 111.2 ல் கொடுக்கப்பட்ட முதல் அடைவுச் சமன்பாட்டையும் எடுத்துக் கொண்டு தீர்வு காண்கிறோம்.

112. தளத்தில் குறுக்கடி இலக்கெண்கள்

நூற் பிரிவு 79 ல் ஒரு வெளியில் உள்ள குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பு முறை பற்றிக் கற்றோம். அது போன்றே ஒரு தளத்தில் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் அனைத்தும் பூச்சியங்கள் ஆக இருக்குமாறு ஒரு குறுக்கடி இலக்கெண் அமைப்பை உருவாக்கமுடியும். அந்தப் புள்ளி அந்த அமைப்பின் துருவம் ஆகும். துருவத்தில் உடன்மாறி, உள்ளார்ந்த வகைக் கெழுக்கள் முறையே பகுதி, முழு வகைக்கெழுக்கள் ஆகின்றன.

113. தளத்தில் இணை வெக்டர் களம்

ஒரு வெளியில் உள்ள ஒரு வளைவின் மேல் உள்ள புள்ளிகளில் இணையாக வரையப்பட்ட வெக்டர்களாலான, ஓர் இணை வெக்டர் களத்தை வரையறை செய்தது போலவே ஒரு தளத்தில் மேல் உள்ள ஒரு வளைவின் வழியேயும் ஓர் இணை வெக்டர் களத்தை வரையறை செய்யலாம்.

எனவே A^{α} என்பது $u^{\alpha} = u^{\alpha}(t)$ என்னும் வளைவின் வழியே உள்ள ஓர் இணை வெக்டர் களம் எனின்

$$\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta t} \equiv \frac{dA^{\alpha}}{dt} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta r \end{matrix} \right\} A^{\beta} \frac{du^{r}}{dt} = 0 \qquad \ldots\ldots(113.1)$$

என்பன அந்தக் களத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்.

முன்போலவே இந்தக் கட்டுப்பாடுகள் 113.1 தேவையும் போதுமானவை என நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு 1: தளத்தில் $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$, δ^{α}_{β} என்பனவற்றின் உடன் மாறி வகைக்கெழுக்கள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன.

குறிப்பு 2: மேலும் $\varepsilon_{\alpha\beta,r}$, $\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{,r}$ என்பனவும் பூச்சியங்களே. இதை நிரூபிக்க நாம் நூற்பிரிவு 6·52ல் கடைப்பிடித்த முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது. ஏனெனில் பொதுவாக யாதாமொரு தளத்தை எடுத்துக் கொண்டால், அத்தளத்தில் செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பு இருக்க வேண்டியது அவசியமன்று. எனவே இதை நிரூபிக்க ஒரு குறுக்கடி இலக்கெண் முறையை எடுத்துக் கொள்கிறோம். அந்த அமைப்பின் துருவத்தில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன. எனவே துருவத்தில் $a_{\alpha\beta}$ ன் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் பூச்சியங்கள். ஆக அணிக்கோவை 'a' ன் பகுதி வகைக்கெழுக்களும் துருவத்தில் பூச்சியங்கள் எனவே துருவத்தில் $\varepsilon_{\alpha\beta,r}$, $\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{,r}$ இரண்டும் பூச்சியங்களே. எனவே அவை எல்லா இலக்கெண் அமைப்பிலும் தளத்தின் மேலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன. அதாவது வரிசைமாற்றுத் தளப்பண்புருக்கள் தள உடன்மாறி, தள உள்ளார்ந்த வகையிடல்களின் போது, மாறிலிகள் போன்று இயங்குகின்றன.

114. தள வளைவுகளின் குறுக்கடிக் கோட்டம்

ஒரு வெளியில் உள்ள திருகு வளைவுகளின் (twisted curves) கொள்கைகளை முன்னர் கண்டோம். தளத்தின் மேலமைந்த திருகுவளைவுகளின் கொள்கைகள் மேற்சொன்ன வெளி வளைவின் கொள்கைகளோடு இசைவு உடையன. அவை பற்றிக் காண்போம்.

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(s) \qquad \text{......(114.1)}$$

என்பன தளத்தின் மேலமைந்த ஒரு வளைவு C-ன் சமன்பாடுகள் என்க. இங்கு s என்னும் ஒட்டளவை, வளைவில் வில்தூரத்தைக் குறிக்கிறது.

மேலும் $(ds)^2 = a_{\alpha\beta}\, du^{\alpha} du^{\beta}$ ......(114.2)

எனவே $a_{\alpha\beta} \dfrac{du^{\alpha}}{ds} \cdot \dfrac{du^{\beta}}{ds} = 1$ ......(114.3)

$\left(\dfrac{du^1}{ds} \cdot \dfrac{du^2}{ds}\right)$ என்பது வளைவு C க்கு u^{α} என்னும் புள்ளியிலுள்ள தொடுகோட்டு வெக்டர் என்பது தெளிவு அதை t^{α} எனக் குறிப்பிடுவோமாக (ஒட்டளவை t க்கும் தொடு கோட்டு வெக்டர் t^{α} க்கும் குழப்பம் நேராது. ஏனெனில் இரண்டாவதில் சுட்டிணைப்பு உண்டு). மேலும் 114.3ன் படி t^{α} என்பது ஓர் அலகு வெக்டர் ஆகும்.

எனவே $t^{\alpha} = \dfrac{du^{\alpha}}{ds}$, ...(114.4)

114.3 ன் படி

$$a_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} = 1 \qquad \text{......(114.5)}$$

114.5 ஐ உள்ளார்ந்த வகையிட

$$a_{\alpha\beta}\, t^{\alpha} \frac{\delta t^{\beta}}{\delta s} = 0 \qquad \text{......(114.6)}$$

எனவே $\dfrac{\delta t^{\alpha}}{\delta s}$ என்னும் தள வெக்டர் t^{α} க்குச் செங்குத்தானது.

$\dfrac{\delta t^{\alpha}}{\delta s}$ ன் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டரை η^{α} எனக் குறிப்போமாக.

அதாவது $$\frac{\delta t^{\alpha}}{\delta s} = \sigma\, n^{\alpha} \qquad \text{......(114.7)}$$

என எழுதலாம். σ என்னும் இந்த மாற்றமிலியை தள வளைவின் குறுக்கடிக் கோட்டம் (geodesic curvature) என்கிறோம். இதை $K_{(g)}$ என்னும் குறியீட்டாலும் குறிப்பிடலாம்.

அடுத்து, n^{α} என்பது தொடுகோட்டு வெக்டர் t^{α} க்குச் செங்குத்தாக தளத்தில் அமைந்துள்ளதால் அது தளத்தில் அலகுச் செங்குத்து வெக்டர் என்பது தெளிவு. n^{α} ன் மிகைத்திசையை t^{α} ல் இருந்து n^{α} க்குச் சுழலும் திசை மிகைத் தன்மை உள்ளவாறு அமைக்கிறோம். அதாவது

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\ t^{\alpha}\ n^{\beta}=1 \qquad \ldots\ldots(114.8)$$

எனவே 114.7 ல் உள்ள சமன்பாடுகள் σ ஐ அளவிலும் திசையிலும் தன்னேரில்லாதபடி உறுதி செய்கின்றன.

மேலும் 106.5 ன் படி

$$n^{\beta}=+\ \varepsilon^{\alpha\beta}\ t_{\alpha} \qquad \ldots\ldots(114.9)$$

என்றும்
$$t^{\beta}=-\ \varepsilon^{\alpha\beta}\ n_{\alpha} \qquad \ldots\ldots(114.10)$$

என்றும் எழுதலாம்.

114.9 ஐ உள்ளார்ந்த வகையிட

$$\frac{\delta n^{\beta}}{\delta s}=\varepsilon^{\alpha\beta}\ \frac{\delta t_{\alpha}}{\delta s}$$

$$=\varepsilon^{\alpha\beta}\ \sigma n_{\alpha}\ \ (114.7\text{ ன்படி})$$

$$=\sigma\,\varepsilon^{\alpha\beta}\ n_{\alpha}$$

$$=-\ \sigma t^{\beta}\ \ (114.10\text{ ன்படி})$$

இதை 114.7 உடன் சேர்க்க ஒரு வளைவின் தள ஃப்ரெனெ சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta t^{\alpha}}{\delta s}&=\sigma n^{\alpha}\\ \frac{\delta n^{\alpha}}{\delta s}&=-\ \sigma t^{\alpha}\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(114.11)$$

குறிப்பு 1 : t^{α}, T^{i} என்பன ஒரே வெக்டரைத்தான் குறிப்பிடுகின்றன. என்றாலும் அவற்றின் கூறுகள் பின்வரும் தொடர்பால் கொடுக்கப்படுகின்றன :

$$T^{i}=x^{i}_{\alpha}\ t^{\alpha}$$

மேலும் n^{α} என்னும் தள அலகுச் செங்குத்து வெக்டர், முதன்மைச் செங்குத்து N^{i} யோ அல்லது துணைச் செங்குத்து B^{i} யோ அல்ல என்பதை நன்கு அறிய வேண்டும். இருப்பினும் அது N^{i}, B^{i} இவற்றால் உறுதி செய்யப்பட்ட செங்குத்துத் தளத்தில் அமைந்துள்ளது.

குறிப்பு 2 : ஒரு தளத்தில் அமைந்த குறுக்கடி வழியே $\dfrac{\delta t^{\alpha}}{\delta s}=0$. எனவே $\sigma=0$.

மறுதலையாக $\sigma=0$ எனில் $\dfrac{\delta t^{\alpha}}{\delta s}=0$, எனவே அந்த வளைவு ஒரு குறுக்கடியாகும்.

எனவே ஒரு வளைவு குறுக்கடி ஆவதற்குத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடு $\sigma=0$ அதாவது அந்த வளைவின் குறுக்கடிக் கோட்டம் பூச்சிய மாவதே.

115. மாதிரிக் கணக்கு

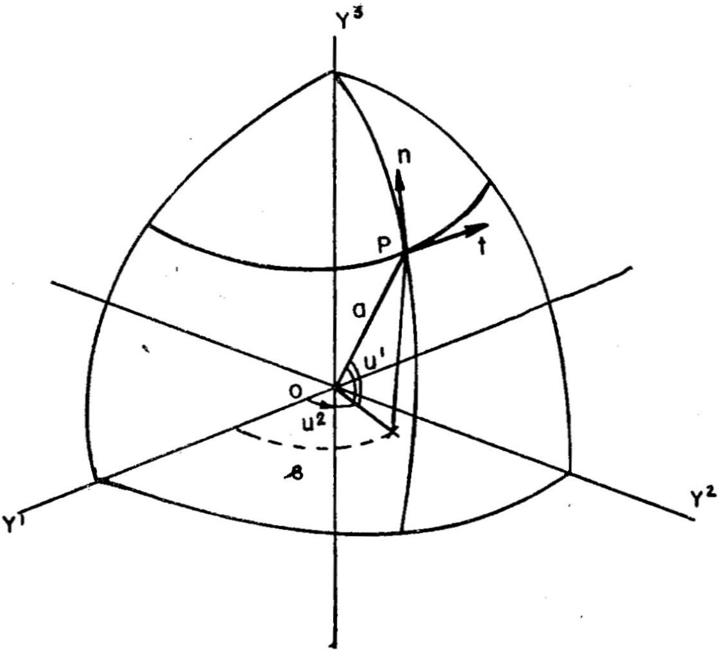
$$S:\ y^{1}=a\cos u^{1}\cos u^{2}$$

$$y^{2}=a\cos u^{1}\sin u^{2}$$

$$y^{3}=a\sin u^{1}$$

என்னும் சமன்பாடுகளால் தரப்படும் ஒரு கோளதளத்தின் மேல் அமைந்த

$u^{1}=u^{1}_{0}$ (ஒரு பூச்சியமில்லா மாறிலி), $u^{2}=u^{2}$ என்னும் சிறு வட்டத்தின் குறுக்கடிக் கோட்டத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்.



கொடுக்கப்பட்ட சிறு வட்டம் C என்க. s என்பது $u^2=0$ என்னும் சமதளத்திலிருந்து C ன் மேல் அளக்கப்படும் வில்தூரம் எனில்,

$$s = (\text{ஆரம்} \times \text{கோணஅளவு}) = a \cos u^1_0 \, . \, u^2$$

$$\therefore u^2 = \frac{s}{a \cos u^1_0}$$

எனவே $u^1 = u^1_0$, $u^2 = \dfrac{s}{a \cos u^1_0}$ என்று Cன் சமன்பாடுகளை எழுதலாம்.

எனவே C ன் வழியே $t^\alpha = \dfrac{du^\alpha}{ds}$ எனும் தொடுகோட்டு வெக்டர்களின் கூறுகள் ஆவன

$$t^1 = 0, \quad t^2 = \frac{1}{a \cos u^1_0}.$$

அதனால் .

$$\frac{\delta t^1}{\delta s} = \frac{dt^1}{ds} + \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} t^\alpha \frac{du^\beta}{ds}$$

$$= \frac{dt^1}{ds} + \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} t^\alpha t^\beta$$

$$= 0 + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,1 \end{Bmatrix} t^1 t^1 + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1\,2 \end{Bmatrix} t^1 t^2 + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,1 \end{Bmatrix} t^2 t^1$$

$$+ \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} t^1 t^2$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} t^2 t^2 \qquad [\because t^1 = 0]$$

மேலும் $$\frac{\delta t^2}{\delta s} = \frac{dt^2}{ds} + \begin{Bmatrix} 2 \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} t^\alpha t^\beta$$

$$= 0 + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} t^2 t^2$$

அடுத்து s என்னும் தளத்தில்

$$a_{11} = (a)^2,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = (a)^2 (\cos u^1)^2$$

ஆகவே $$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2a_{11}} \frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} = -\frac{1}{2(a)^2} \frac{\partial (a^2 \cos^2 u^1)}{\partial u^1}$$

$$= \sin u^1 \cos u^1$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2a_{22}} \frac{\partial a_{22}}{\partial u^2}$$

$$= 0.$$

எனவே $\dfrac{\delta t^\alpha}{ds} = \sigma n^\alpha$ ல் பிரதியிட

$$\frac{\delta t^1}{\delta s} = \sigma n^1$$

$$\sigma n^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\,2 \end{Bmatrix} t^2 t^2$$

$\therefore$ Pல் $\sigma n^1 = \sin u_0^1 \cos u_0^1 \; t^2 t^2$

$$= \frac{1}{a^2} \tan u_0^1 \qquad \ldots\ldots(115.1)$$

$$\sigma n^2 = \frac{\delta t^2}{\delta s}$$

$$= \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 2 \end{Bmatrix} t^2 t^2$$

$$= 0$$

$$\therefore n^2 = 0, \quad \because \sigma \neq 0$$

n^α அலகு வெக்டர் ஆதலின்

$$a_{\alpha\beta}\ n^\alpha\ \eta^\beta = 1$$

எனவே $a_{11}\ n^1 n^1 + 2a_{12}\ n^1 n^2 + a_{22}\ n^2 n^2 = 1$

$$\therefore (a)^2 (n^1)^2 = 1 \quad \therefore n^1 = \frac{1}{a}.$$

எனவே 115.1ல் பிரதியிட

$$\sigma n^1 = \sigma . \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} \tan u^1_0$$

$$\therefore \sigma = \frac{\tan u^1_0}{a}.$$

எனவே C ன் குறுக்கடிக் கோட்டம் $\dfrac{\tan u^1_0}{a}$ ஆகும்.

116. தளத்திற்குச் செங்குத்து வெக்டர்

u^α என்னும் புள்ளியில் தளத்திற்குச் செங்குத்தான அலகு வெக்டர் ξ : ன் கூறுகளை இப்பொழுது கண்டு பிடிப்போம். இது ஒரு வெளி வெக்டர் என்பது தெளிவு.

u^1, u^2 வளைவுகள், தளத்திற்கு u^α என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட செங்குத்து, இவை வலக்கை அமைப்பாக உள்ளவாறு ஓர் அமைப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இலக்கெண் வளைவுகளுக்கு தளத்தில் வரையப்படும் தள அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர்கள் $\dfrac{1}{\sqrt{a_{11}}}\delta^\alpha_1$, $\dfrac{1}{\sqrt{a_{22}}}\delta^\alpha_2$ என்பனவாகும்.

எனவே இவற்றிற்குச் சரியான வெளிவெக்டர்கள்

$\frac{1}{\sqrt{a_{11}}} x^i_\alpha \delta^\alpha_1$, $\frac{1}{\sqrt{a_{22}}} x^i_\alpha \delta^\alpha_2$ என்பனவாகும்.

அதாவது

$$\frac{1}{\sqrt{a_{11}}} x^i_1, \quad \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} x^i_2$$

ω என்பது இலக்கு வளைவுகளிடையே உள்ள கோணம் எனில், நூற்பிரிவு 54-ன்படி

$$1.1. \ \sin \omega \ \xi_i = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} x^j_1 \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} x^k_2$$

சமன்பாடு 106.6 ஐப் பயன்படுத்த

$$\sqrt{\frac{a}{a_{11} a_{22}}} \ \xi_i = \varepsilon_{ijk} \frac{1}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} x^j_1 \ x^k_2$$

$$\therefore \xi_i = \frac{1}{\sqrt{a}} \varepsilon_{ijk} x^j_1 \ x^k_2 \qquad \text{......(116.1)}$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் $\sqrt{a}$ இருப்பதால் ξ_i என்பது உடன் மாறி வெக்டர் என்பது தெளிவாகவில்லை. எனவே இதைச் சற்று மாற்றி,

$$\xi_i = \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ijk} \ x^j_\alpha \ x^k_\beta \qquad \text{......(116.2)}$$

என்று எழுதுகிறோம். இப்போது ξ_i என்பது ஓர் உடன்மாறி வெக்டர் என்பது தெளிவு.

குறிப்பு 1: அணிக்கோவை உருவில் எழுதக் கூடியது ஆதலின் சமன்பாடு 116.1 கணக்கிடுவதற்கு எளியது. ஆனால் 116.2 கொள்கை விளக்கங்களுக்குப் பயனுள்ளது.

குறிப்பு 2: ξ_i என்பது ஒரு வெளி வெக்டர். அது தளத்தில் அமைந்தது அல்ல. அதற்குச் சரியான ξ_α எனும் தள வெக்டர் ஏதும் கிடையாது.

116.1 ல் இருந்து

$$g_{ij} \xi^i x^j_\beta = 0 \qquad \text{......(116.3)}$$

என எழுதலாம். இதிலிருந்து ξ^i என்னும் வெளி வெக்டர் x^i_β என்னும் தள வெக்டருக்குச் செங்குத்தானது எனத் தெரிகிறது. இது ஒரு பயனுள்ள சமன்பாடு.

117. பண்புருக்களின் பண்புரு வகைக்கெழுக்கள்.

தளத்தின் தன்மைகள் பற்றிக் கற்கும்பொழுது ஆங்கிலச் சுட்டிணைப்புகளும், கிரேக்கச் சுட்டிணைப்புகளும் கலந்து வரும் பண்புருக்கள் சில தேவைப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக x^i_α ஐச் சொல்லலாம். அவ்வாறு உள்ள எல்லாப் பண்புருக்களும் வெளியைப் பொருத்து முரண்மாறித் தன்மையுடையனவாகவும், தளத்தைப் பொருத்து உடன்மாறித் தன்மையுடையனவாகவும் உள்ளன.

A^i_α என்பது அவ்வாறுன ஒரு பண்புருவாக இருக்கட்டும். இலக்கெண் அமைப்புகளை வெளியிலும் தளத்திலும் சேர்ந்து நாம் மாற்றும்பொழுது

$$\bar{A}^j_\beta = A^i_\alpha \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \qquad \text{......(117.1)}$$

என்னும் மாற்றுரு விதி கிடைக்கிறது. இனி இந்தப் பண்புருக்களை வகையிடல் மூலம் வேறு பண்புருக்களை உருவாக்க முயல்வோமாக. கொடுக்கப்பட்ட தளம் S ன் மேல் அமைந்த C என்னும் வளைவை எடுத்துக்கொள்வோம். t என்பது C யின் ஊடே வளைவின் ஒட்டளவை என்க.

X_i என்பது C ன் வழியே வெளியில் வரையறை செய்யப்பட்ட ஓர் இணை வெக்டர் களம் என்க. எனவே $\frac{\delta X_i}{\delta t} = 0$ என்பது கட்டுப்பாடு.

அதாவது
$$\frac{dX_i}{dt} - \left\{ {j \atop ik} \right\} x_j \frac{dx^k}{dt} = 0 \qquad \text{......(117.2)}$$

தளத்தின் மேல் C வழியே y^α என்னும் யாதாமொரு இணை வெக்டர் களத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே
$$\frac{\delta Y^\alpha}{\delta t} = 0$$

ஆதலின் $$\frac{dY^{\alpha}}{dt} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta r \end{Bmatrix} Y^{\beta} \frac{du^{r}}{dt} = 0 \qquad \ldots\ldots(117.3)$$

அடுத்து $A^{i}_{\alpha} X_{i} Y^{\alpha}$ எனும் மாற்றமிலியை எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே t ஐப் பொருத்து அதன் வகைக்கெழு வெளி, தள இலக்கெண்களைப் பொருத்து மாற்றமிலியாகும்.

எனவே $$\frac{d}{dt}\left(A^{i}_{\alpha} X_{i} y^{\alpha}\right) = \frac{dA^{i}_{\alpha}}{dt} x^{i} Y^{\alpha} + A^{i}_{\alpha} \frac{dx^{i}}{dt} Y^{\alpha} + A^{i}_{\alpha} x^{i} \frac{dy_{\alpha}}{dt}$$

117.2, 117.3 இவற்றைப் பயன்படுத்த

$$\frac{d}{dt}\left[A^{i}_{\alpha} X^{i} Y^{\alpha}\right] = \frac{dA^{i}_{\alpha}}{dt} X^{i} Y^{\alpha} + A^{i}_{\alpha} \begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix} X_{j} \frac{dx^{k}}{dt} Y^{\alpha} - A^{i}_{\alpha} X_{i} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta r \end{Bmatrix} Y^{\beta} \frac{du^{r}}{dt}$$

$$= \frac{dA^{i}_{\alpha}}{dt} X^{i} Y^{\alpha} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} A^{j}_{\alpha} X^{j} Y^{\alpha} x^{k}_{\beta} \frac{du^{\beta}}{dt} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A^{i}_{\varepsilon} X_{i} Y^{\alpha} \frac{du^{\beta}}{dt}$$

(போலிச்சுட்டிணைப்புகளை தேவையானபடி மாற்ற)

எனவே

$$\frac{d}{dt}\left[A^{i}_{\alpha} X_{i} Y^{\alpha}\right] = \left[\frac{\partial A^{i}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} A^{j}_{\alpha} x^{k}_{\beta} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A^{i}_{t}\right] \frac{du^{\beta}}{dt} X i^{y}_{\alpha} \qquad \ldots\ldots(117.4)$$

ஈவு விதியைப் பயன்படுத்தி சதுர அடைப்புக் குறிக்குள் இருப்பதுவும் பண்புருவாகும் எனலாம். இந்தப் பண்புருவை u^{β} ஐப் பொருத்து A^{i}_{α} ன் பண்புரு வகைக்கெழு (tensor derivative) என்கிறோம். இதை அரைப்புள்ளிக் (Semicolon) குறியீட்டினால் குறிக்கிறோம்.

$$A^i_{\alpha;\beta} \equiv \frac{\partial A^i_\alpha}{\partial u^\beta} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} A^j_\alpha x^k_\beta - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A^i_\varepsilon \qquad \ldots\ldots(117.5)$$

பின்வரும் கோவையை

$$\frac{\delta A^i_\alpha}{\delta t} = \left[\frac{\partial A^i_\alpha}{\partial u^\beta} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} A^i_\alpha x^k_\beta - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A^i_\varepsilon\right] \frac{du^\beta}{dt}$$

$$= \frac{dA^i_\alpha}{dt} + \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix} A^i_\alpha \frac{dx^k}{dt} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A^i_\varepsilon \frac{du^\beta}{dt} \qquad \ldots\ldots(117.6)$$

A^i_α ன் உள்ளார்ந்த பண்புரு வகைக்கெழு (Intrinsic tensor derivative) என்கிறோம்.

குறிப்பு 1 : தளத்தில் P என்னும் ஏதோ ஒரு புள்ளியில் தள இலக்கெண் அமைப்பு குறுக்கடி அமைப்பாகவும், வெளி இலக்கெண் அமைப்பு செங்கோணத் தெக்காட்டின் அமைப்பாகவும் இருப்பின், அந்தப் புள்ளியில் பண்புரு வகைக்கெழுக்கள் பகுதி வகைக் கெழுக்களாகவும் உள்ளார்ந்த பண்புரு வகைக்கெழுக்கள் சாதாரண வகைக்கெழுக்களாகவும் எளிதாக அமைகின்றன. எனவே வகையிடலின் கூட்டல், பெருக்கல் விதிகள் பண்புரு வகைக்கெழுக்களுக்கும், உள்ளார்ந்த பண்புரு வகைக்கெழுக் களுக்கும் பொருந்தும்.

மேலும் நாம் எடுத்துக்கொண்ட சிறப்பு இலக்கெண் அமைப்புகளில் g_{ij}, $a_{\alpha\beta}$, ε_{ijk}, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, மற்றும் இவற்றின் துணைப் பண்புருக்களின் சாதாரண பகுதி வகைக்கெழுக்கள் பூச்சிய மாகின்றன. எனவே பொதுவாக எல்லா இலக்கெண் அமைப்பு களிலும் அவற்றின் பண்புரு வகைக்கெழுக்களும் பூச்சியங்களே ஆகும். ஆகவே பண்புரு வகையிடலின்போது அவற்றை மாறிலிகள் போன்று இயக்கலாம்.

குறிப்பு 2: பண்புரு வகையிடலின் கருத்தை வெளிப் பண்புருக்களுக்கும், தளப் பண்புருக்களுக்கும் நீட்டலாம். பண்புரு வகைக்கெழுவின் வரையறைப்படி,

$$A_{\alpha;\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\beta} - \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} A_\varepsilon$$

எனவே u^β ஐப் பொருத்து A_α ன் பண்புரு வகைக்கெழு தளத்தில் அதன் உடன்மாறி வகைக்கெழுவே ஆகும்.

அடுத்து,

$$A^{ij}_{;\,\alpha} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^\alpha} + \left\{ {i \atop lk} \right\} A^{lj}\, x^k_\alpha + \left\{ {j \atop lk} \right\} A^{il}\, x^k_\alpha$$

$$= A^{ij}_{,k}\; x^k_\alpha$$

$$\therefore \quad A^{ij}_{;\,\alpha} = A^{ij}_{,\,k}\, x^k_\alpha \,.$$

எனவே u^α ஐப் பொருத்து ஒரு வெளிப்பண்புருவின் வகைக்கெழுவானது, x^k ஐப் பொருத்து அந்த வெளிப் பண்புருவின் உடன்மாறி வகைக்கெழு, x^k_α என்னும் பண்புரு இவற்றின் அகப் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம்.

118. தளத்தின் இரண்டாம் அடிப்படை உரு: காசின் சூத்திரங்கள் (The second fundamental form of a Surface: Gauss's formulae).

முந்தைய நூற்பிரிவில் நாம் கண்ட பண்புரு வகையிடல், பண்புரு கணிதத்தில் மிக முக்கியமான காசின் சூத்திரங்களை உருவாக்க நமக்கு உதவுகின்றது.

u^β ஐப் பொருத்து x^i_α ன் பண்புரு வகைக்கெழுவை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$x^i_{\alpha\,;\,\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ {i \atop jk} \right\} x^i_\alpha\; x^k_\beta - \left\{ {r \atop \alpha\beta} \right\} x^i_r \qquad \ldots\ldots(118.1)$$

இதிலிருந்து $x^i_{\alpha;\,\beta}$ α, β களில் சமச்சீர் உடையது எனத் தெரிகிறது.

அதாவது $$x^i_{\alpha;\,\beta} = x^i_{\beta\,;\,\alpha} \qquad \ldots\ldots(118.2)$$

இனி $$a_{\alpha\beta} = g_{ij}\, x^i_\alpha\, x^j_\beta \qquad \ldots\ldots(118.3)$$

ஆனல் $a_{\alpha\beta}$ ன் பண்புரு வகைக்கெழு பூச்சியம் எனவே 118.3 ஐ பண்புரு வகையிட

$$g_{ij}\, x^i_{\alpha;\, r}\, x^j_{\beta} + g_{ij}\, x^i_{\alpha}\, x^j_{\beta;\, r} = 0 \qquad \ldots\ldots(118.4)$$

α, β, r களை வட்ட வரிசையில் மாற்ற

$$g_{ij}\, x^i_{\beta;\, \alpha}\, x^j_{r} + g_{ij}\, x^i_{\beta}\, x^j_{r;\, \alpha} = 0 \qquad \ldots\ldots(118.5)$$

$$g_{ij}\, x^i_{r;\, \beta}\, x^j_{\alpha} + g_{ij}\, x^i_{r}\, x^j_{\alpha;\, \beta} = 0 \qquad \ldots\ldots(118.6)$$

(118.5) + (118.6) — (118.4) ஐ எடுத்துக்கொள்ள

$$g_{ij}\, x^i_{\beta;\, \alpha}\, x^j_{r} + g_{ij}\, x^i_{\beta}\, x^j_{r;\, \alpha} + g_{ij}\, x^i_{r;\, \beta}\, x^j_{\alpha} + g_{ij}\, x^i_{r}\, x^j_{\alpha;\, \beta}$$
$$-g_{ij}\, x^i_{\alpha;\, r}\, x^j_{\beta} - g_{ij}\, x^i_{\alpha}\, x^j_{\beta;\, r} = 0$$

சுட்டிணைப்புகளை தக்கவாறு மாற்றி, 118.2 ஐப் பயன்படுத்த

$$g_{ij}\, x^i_{\beta;\, \alpha}\, x^j_{r} + g_{ji}\, x^j_{\beta}\, x^i_{r;\, \alpha} + g_{ji}\, x^i_{\alpha}\, x^j_{\beta;\, r} + g_{ij}\, x^i_{r}\, x^j_{\alpha;\, \beta}$$
$$-g_{ij}\, x^j_{\beta}\, x^i_{\alpha;\, r} - g_{ij}\, x^i_{\alpha}\, x^j_{\beta;\, r} = 0$$

எனவே $g_{ij}\, x^i_{\alpha;\, \beta}\, x^j_{r} + g_{ij}\, x^j_{r}\, x^i_{\alpha;\, \beta} = 0$

$$\therefore \quad g_{ij}\, x^i_{\alpha;\, \beta}\, x^j_{r} = 0 \qquad \ldots\ldots(118.7)$$

இதிலிருந்து தளத்தில் உள்ள எல்லா x^j_r வெக்டர்களுக்கும் $x^i_{\alpha;\,\beta}$ என்னும் முரண்மாறி வெளி வெக்டர் செங்குத்தானது எனத் தெரிகிறது. அதாவது இது அலகுச் செங்குத்து வெக்டர் ξ^i ன் திசையில் உள்ளது. எனவே

$$x^i_{\alpha;\, \beta} = b_{\alpha\beta}\, \xi^i \qquad \ldots\ldots(118.8)$$

என்னும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமாறு $b_{\alpha\beta}$ என்ற சார்புகள் உண்டு என்பது தெளிவு.

118.8 லிருந்து $b_{\alpha\beta}$ ஒரு முரண்மாறி சமச்சீர் தளப்பண்புரு எனத் தெரிகிறது.

118.8 ஆல் கொடுக்கப்படும் சமன்பாடுகளை காசின் சூத்திரங்கள் என்கிறோம்.

$b_{\alpha\beta}\ du^{\alpha}\ du^{\beta}$ என்னும் கோவையைத் தளத்தின் இரண்டாம் அடிப்படை உரு என்கிறோம். அதை B எனக் குறிக்கிறோம்.

எனவே $B = b_{\alpha}\ \beta du^{\alpha}\ d_{u}{}^{\beta}$ ......(118.9)

குறிப்பு: ξ^{i} என்பது அலகு வெக்டர் ஆதலின் ξ_{i} ஆல் 118.8 ஐப் பெருக்க,

$$b_{\alpha}\beta = x^{i}_{\alpha;\beta}\ \xi_{i}$$

116.2 ஐப் பயன்படுத்த

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{r\delta}\ \varepsilon_{ijk}\ x^{i}_{\alpha;\beta}\ x^{j}_{r}\ x^{k}_{\delta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\varepsilon_{ijk}\ x^{i}_{\alpha;\beta}\ x^{j}_{1}\ x^{k}_{2} \qquad \text{......(118.10)}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

119. தளத்தின் மூன்றும் அடிப்படை உரு; வெயின் கார்டனின் சூத்திரங்கள் (The third fundamental form of a surface ; Weingarten's formulae)

ξ^{i} என்பது அலகு செங்குத்து வெக்டர் ஆதலின்

$$g_{ij}\ \xi^{i}\xi^{j} = 1 \qquad \text{......(119.1)}$$

இதை u^{α} ஐப் பொருத்து பண்புரு வகையிட

$$g_{ij}\,\xi^{i}\ \xi^{j}_{;\alpha} + g_{ij}\,\xi^{i}_{;\alpha}\ \xi^{j} = 0$$

g_{ij} சமச்சீர் உடையது ஆதலின்,

$$g_{ij}\,\xi^{i}\ \xi^{j}_{;\alpha} = 0 \qquad \text{......(119.2)}$$

எனவே $\xi^{j}_{;\alpha}$ என்னும் முரண்மாறி வெளி வெக்டர் ξ^{i} என்னும் செங்குத்து வெக்டருக்கு செங்குத்தானது. எனவே அது ஒரு தள வெக்டர் ஆகும்.

ஆகவே $\xi^i_{;\alpha} - \eta^\beta_\alpha x^i_\beta$ ......(119.3)

என்னும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும்படியான η^β_α என்னும் அளவுகள் உள்ளன. ஈவு விதியின்படி η^β_α ஒரு கலப்புத் தளப் பண்புருவாகும்.

இனி 116-3ன் படி

$$g_{ij}\ \xi^i\ x^j_\beta = 0$$

இதைப் பண்புரு வகையிட

$$g_{ij}\ \xi^i_{;\alpha}\ x^j_\beta + g_{ij}\,\xi^i\, x^j_{\beta;\alpha} = 0 \qquad ......(119.4)$$

119.3 யும், 118.8 யும் பயன்படுத்த

$$g_{ij}\,\eta^r_\alpha\ x^i_r\ x^j_\beta + g_{ij}\,\xi^i\, b_{\alpha\beta}\,\xi^j = 0 \qquad ......(119.5)$$

ஆனல் $g_{ij}\, x^i_r\ x^j_\beta = a_{r\beta}$, $g_{ij}\,\xi^i\,\xi^j = 1$

இவற்றைப்பிரதியிட

$$a_{r\beta}\ \eta^r_\alpha + b_{\alpha\beta} = 0$$

எனவே

$$b_{\alpha\beta} = -a_{\beta r}\ \eta^r_\alpha \qquad ......(119.6)$$

$a^{\beta\varepsilon}$ ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய,

$$\eta^\varepsilon_\alpha = -a^{\beta\varepsilon}\ b_{\alpha\beta} \qquad ......(119.7)$$

இதை 119.3 ல் பிரதியிட

$$\xi^i_{;\alpha} = -a^{r\beta}\ b_{\alpha r}\ x^i_\beta \qquad ......(119.8)$$

இந்தச் சமன்பாடுகளை (119.8) **வெயின் கார்டனின் சூத்திரங்கள்** என்கிறோம்.

அடுத்து,

$$C_{\alpha\beta} = g_{ij}\, \xi^i_{;\alpha}\, \xi^j_{;\beta} \qquad \ldots\ldots(119.9)$$

என்னும் சமன்பாடுகளால் வரையறை செய்யப்படும் $C_{\alpha\beta}$ என்னும் சமச்சீர்ப் பண்புருவை அறிமுகப் படுத்துகிறோம்.

$C_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta$ என்னும் இருபடிக் கோவையைத் தளத்தின் **மூன்றும் அடிப்படை உரு** என்கிறோம். அதை C எனக் குறிக்கிறோம்.

எனவே $C = C_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \qquad \ldots\ldots(119.10)$

குறிப்பு: $C_{\alpha\beta} = a^{r\delta}\, b_{\alpha r}\, b_{\beta\delta}$

நிருபணம்: 119.9 ன்படி $C_{\alpha\beta} = g_{ij}\, \xi^i_{;\alpha}\, \xi^j_{;\beta}$

119.8 ஐப் பயன்படுத்த,

$$C_{\alpha\beta} = g_{ij}\left[-a^{r\delta}\, b_{\alpha r}\, x^i_\delta\right]\left[-a^{\sigma\mu}\, b_{\beta\sigma}\, x^j_\mu\right]$$

$$= g_{ij}\, x^i_\delta\, x^j_\mu\, a^{r\delta}\, a^{\sigma\mu}\, b_{\alpha r}\, b_{\beta\sigma}$$

$$= a_{\delta\mu}\, a^{r\delta}\, a^{\sigma\mu}\, b_{\alpha r}\, b_{\beta\sigma}$$

$$= a^{r\sigma}\, b_{\alpha r}\, b_{\beta\sigma}$$

$$= a^{r\delta}\, b_{\alpha r}\, b_{\beta\delta} \quad \text{(போலிச் சுட்டிணைப்பை மாற்றி)}$$

எனவே $C_{\alpha\beta} = a^{r\delta}\, b_{\alpha r}\, b_{\beta\delta} \qquad \ldots\ldots(119.11)$

120. காஸ், கொடசி சமன்பாடுகள் (Equations of Gauss & Codazzi)

அடுத்து, தளத்தைப் பற்றிய வடிவ கணிதக் கொள்கைகளில் மையமான சூத்திரங்களை நாம் உருவாக்குவோமாக. தளம் ஆழ்ந்துள்ள வெளியில் செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கெண் அமைப்பையும், தளத்தில் P என்ற புள்ளியில் குறுக்கடி இலக்கெண்

அமைப்பையும் எடுத்துக்கொள்வோம். வெளிக் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் வெளியில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன. தளக் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் துருவம் *P* ல் மறைகின்றன. எனவே *P* ல் $x^i_{\alpha;\beta}$ ன் பண்புரு வகைக்கெழு அதாவது x^i_α இரண்டாம் அடைவுப் பண்புரு வகைக்கெழு பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படும்.

$$x^i_{\alpha;\beta r} = \frac{\partial^3 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^r} - \frac{\partial}{\partial u^r}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{Bmatrix} x^i_\sigma \qquad \ldots\ldots(120.1)$$

மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் β, r இவற்றை இடமாற்றி எழுதி அதை 120.1 ல் இருந்து கழிக்க,

$$x^i_{\alpha;\beta r} - x^i_{\alpha;r\beta} = \left[\frac{\partial}{\partial u^\beta}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \alpha\, r\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u^r}\begin{Bmatrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}\right] x^i_\sigma \qquad \ldots\ldots(120.2)$$

ஆனல் நாம் எடுத்துக் கொண்ட குறிப்பிட்ட இலக்கெண் அமைப்புகளில் சதுர அடைப்புக்குள் உள்ள கோவை *P*-ல் $R^\sigma_{\cdot\alpha\beta r}$ எனும் தள ரீமான்-கிறித்தஃபல் பண்புருவாகும்.

எனவே

$$x^i_{\alpha;\beta r} - x^i_{\alpha;r\beta} = R^\sigma_{\cdot\alpha;\beta r}\, x^i_\sigma \qquad \ldots\ldots(120.3)$$

என எழுதலாம். இந்தப் பண்புருச் சமன்பாடு நாம் எடுத்துக் கொண்ட குறிப்பிட்ட இலக்கெண் அமைப்புகளில் *P* ல் உண்மை. எனவே எல்லா இலக்கெண் அமைப்புகளிலும் *P* ல் உண்மை. மேலும் *P* தளத்தில் யாதாமொரு புள்ளி ஆதலின், தளத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் 120.3 உண்மையாகும்.

இனி 118.8 ன் படி

$$x^i_{\alpha;\beta} = b_{\alpha\beta}\,\xi^i$$

இரு பக்கங்களிலும் பண்புரு வகையிட

$$x^i_{\alpha;\beta r} = b_{\alpha\beta;r}\,\xi^i + b_{\alpha\beta}\,\xi^i_{;r}$$

$$= b_{\alpha\beta;r}\,\xi^i - a^{\varepsilon\sigma}\, b_{\alpha\beta}\, b_{r\varepsilon}\, x^i_\sigma \quad \text{(119.8 ன் படி)}$$

இதை 120.3 ல் பிரதியிட

$$\left(b_{\alpha\beta\,;\,r} - b_{\alpha r\,;\,\beta}\right)\xi^i - a^{\varepsilon\sigma}\left(b_{\alpha\beta}\,b_{r\varepsilon} - b_{\alpha r}\,b_{\beta\varepsilon}\right)x^i_\sigma$$

$$= R^{\sigma}_{\cdot\,\alpha\beta r}\,x^i_\sigma \qquad \ldots\ldots(120.4)$$

இரு பக்கங்களிலும் ξ_i ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்து 116.3 ஐப் பயன்படுத்த

$$b_{\alpha\beta\,;\,r} - b_{\alpha r\,;\,\beta} = 0 \qquad \ldots\ldots(120.5)$$

இந்தச் சமன்பாடுகளைத் தளத்தின் **கொடசி சமன்பாடுகள்** (Codazzi equations) என்கிறோம்.

மீண்டும் 120.4 ஐ $g_{ij}\,x^j_\rho$ ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்து 116.3 ஐப் பயன்படுத்த

$$-a^{\varepsilon\sigma}\left(g_{ij}\,x^i_\sigma\,x^j_\rho\right)\left(b_{\alpha\beta}\,b_{r\varepsilon} - b_{\alpha r}\,b_{\beta\varepsilon}\right)$$

$$= R^{\sigma}_{\cdot\alpha\beta r}\,x^i_\sigma\,g_{ij}\,x^j_\rho$$

$$-a^{\varepsilon\sigma}\,a_{\sigma\rho}\left(b\alpha\beta\;b_{r\varepsilon} - b_{\alpha r}\,b_{\beta\varepsilon}\right) = R^{\sigma}_{\cdot\,\alpha\beta r}\,a_{\sigma\rho}$$

அதாவது $-\delta^t_\rho\left(b_{\alpha\beta}\,b_{r\varepsilon} - b_{\alpha r}\,b_{\beta\varepsilon}\right) = R_{\rho\alpha\beta r}$

அதாவது $b_{\alpha r}\,b_{\beta\rho} - b_{\alpha\beta}\,b_{r\rho} = R_{\rho\alpha\beta r}$ ......(120.6)

இவை தளத்தின் **காசின் சமன்பாடுகள்** (Gauss's equations) எனப்படும்.

கிரேக்கச் சுட்டிணைப்புகள் 1,2 என்னும் இரு மதிப்புகளை ஏற்பனவாகையால் இருதனி கொடசி சமன்பாடுகள் உள்ளன. இரு பரிமாணத்தில் R_{1212} ஒன்று தான் கோட்டப் பண்புருவின் மறையாத கூறு ஆதலின் காசின் சமன்பாடு ஒன்றே. எனவே காசின் சமன்பாடு

$R_{1212} = b_{11}\,b_{22} - (b_{12})^2$ என்றாகிறது.

அதாவது $R_{1212} = \left|b_{\alpha\beta}\right| = b$.

121. தளத்தின் கோட்டங்கள்

$$K = \frac{R_{1212}}{a_{11}a_{22}-(a_{12})^2} = \frac{b}{a} \quad \text{......(121.1)}$$

என்று எழுதலாம். K தளத்தின் ரீமானின் கோட்டம் ஆகும். தளத்தின் மேல் K யை **காசின் கோட்டம்** அல்லது **தளத்தின் முழுமைக் கோட்டம்** (Gaussion or total curvature of the surface) என்கிறோம்.

அடுத்து $K = \frac{R_{1212}}{a}$

$\therefore R_{1212} = a\, K.$

அதாவது $R_{\alpha\beta r\delta} = K\, a\; e_{\alpha\beta}\, e_{r\delta}$

$$R_{\alpha\beta r\delta} = K\, \varepsilon_{\alpha\beta}\; \varepsilon_{r\delta} \quad \text{......(121.2)}$$

இதிலிருந்து K ஒரு மாற்றமிலி எனத் தெரிகிறது.

மேலும் $\varepsilon^{\alpha\beta}\; \varepsilon_{\alpha\beta} = 2$ ஆதலின்

121.2 ல் இருந்து

$$K = \frac{1}{4}\; R_{\alpha\beta r\delta}\; \varepsilon^{\alpha\beta}\; \varepsilon^{r\delta} \quad \text{......(121.3)}$$

அடுத்து H என்னும் மற்றுமொரு முக்கியமான மாற்றமிலியை அறிமுகப்படுத்துகிறோம்.

$$H = \tfrac{1}{2}\, a^{\alpha\beta}\; b_{\alpha\beta} \quad \text{......(121.4)}$$

என்ற சமன்பாட்டால் H ஐ வரையறை செய்கிறோம். H தளத்தின் **சராசரிக் கோட்டம்** (mean curvature) எனப்படும்.

தளத்தின் மாற்றமிலிகளாகிய H, K எனும் இவ்விருவகைக் கோட்டங்களும், தளத்தின் செங்குத்து வெட்டு முகத்தில் (normal section) அமைந்த செங்குத்துக் கோட்டத்தோடு (normal curvature) எவ்வாறு தொடர்பு கொண்டுள்ளன எனப்பின்னர் காண்போம்.

122. தளத்தின் அடிப்படை உருக்களிடையே உள்ள தொடர்பு

$$A = a_{\alpha\beta}\; du^\alpha\; du^\beta, \quad B = b_{\alpha\beta}\; du^\alpha\, du^\beta,$$

$C = c_{\alpha\beta}\; du^\alpha\; du^\beta$ என்பன தளத்தின் மூவகை அடிப்படை உருக்கள் ஆயின்

$$C - 2\,H\,B + K\,A = 0 \quad \text{......(122.1)}$$

என்பது அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு ஆகும்.

நிரூபணம்: $C_{\alpha\beta}-2Hb_{\alpha\beta}$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$C_{\alpha\beta}-2Hb_{\alpha\beta}=a^{r\delta}\; b_{\alpha r}\; b_{\beta\delta}-a^{\rho r}\; b_{\rho r}\; b_{\alpha\beta}$$

[119.11, 121.4 படி]

$$=a^{r\delta}\; b_{\alpha r}\; b_{\beta\delta}-a^{\delta r}\; b_{\delta r}\; b_{\alpha\beta}$$

$$=a^{r\delta}\left[b_{\alpha r}\, b_{\beta\delta}-b_{\delta r}\, b_{\alpha\beta}\right]$$

$$=a^{r\delta}\; R_{\delta\alpha\beta r} \quad \text{(120.6 ன் படி)}$$

$$=-a^{r\delta}R_{\alpha\beta r\delta}$$

$$=-a^{r\delta}\; K\varepsilon_{\alpha\beta}\;\varepsilon_{r\delta} \quad \text{(121.2 ன் டி)}$$

$$=-K\, a_{\alpha\beta}$$

எனவே $C_{\alpha\beta}-2\,H\,b_{\alpha\beta}=-K\,a_{\alpha\beta}$

இருபக்கமும் $du^{\alpha}\;du^{\beta}$ ஆல் பெருக்க

$$C-2\,H\,B=-K\,A$$

எனவே $C-2\,H\,B-K\,A=0$

குறிப்பு: $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ என்பன $S: x^i=x^i\;(u^{\alpha})$ என்னும் தளத்தின் அடிப்படைப் பண்புருக்கள் எனில் அவை சமன்பாடுகள் 120.5 120.6 ஐ நிறைவு செய்கின்றன என நிரூபித்தோம். மறுதலையாக 120.5, 120.6 இவற்றை நிறைவு செய்யும் $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ என்னும் இரு சார்புகள் இருந்து, $a_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,du^{\beta}$ மிகை உறுதி உருவாகவும் இருப்பின், $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ அடிப்படை உருக்களாக உள்ள S என்னும் தளத்தைத் தன்னேரில்லாதபடி தீர்மானிக்க முடியும் என்று நிரூபிக்கலாம். (இவ்வாறு தீர்மானிக்கும் தளம் S தான் தன்னேரில்லாததே அன்றி வெளியில் அதன் நிலையன்று. அதாவது வெளியில் தளம் எவ்வித இடப் பெயர்ச்சியோ, சுழற்சியோ அடைந்திருக்கலாம், அந்த நிலை மாற்றத்தைத் தீர்மானிக்க முடியாது) மறுதலையின் நிரூபணம் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியின் தீர்வு உளதாம் தன்மை (existence of solution) யைப் பொருத்ததால், இங்கு தரப்பட வில்லை. அறிந்து கொள்ள ஆவலுள்ளவர்கள் L. P. Eisenhart: Differential Geometry எனும் ஆங்கில நூலில் 157-459 பக்கங்களில் கொடுக்கப் பட்டுள்ள நிரூபணத்தை அருள் கூர்ந்து பார்க்கவும்.

123. செங்குத்துக் கோட்டம் (Normal curvature) மெசுனியரின் தேற்றம் (Meusnier's theorem)

தேற்றம் : ஒரு தளத்தின் ஒரு புள்ளியில் ஒரே தொடு கோடுடைய எல்லா வளைவுகளையும் அத்தளத்தின்மேல் எடுத்துக் கொண்டால், அவற்றிற்கு $K \cos \theta$ ஒரு மாறிலி ஆகும். இங்கு K என்பது அப்புள்ளியில் வளைவின் கோட்டம், θ என்பது முதன்மை செங்குத்து N^i க்கும் தளச் செங்குத்து ξ^i க்கும் இடைக் கோணம் ஆகும்.

நிருபணம் : $S: x^i = x^i(u^\alpha)$ என்னும் தளத்தின் மேல் $u^\alpha = u^\alpha(s)$ என்பது ஒரு வளைவு என்க. இங்கு s என்பது வில்தூரம் u^α ன் மதிப்புகளைப் பிரதியிட வெளியில் வளைவின் சமன்பாடுகளை

$$x^i = x^i\,(s)$$

என எழுதலாம்.

ப்ரெனயின் சூத்திரங்களின் படி

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta T^i}{\delta s} &= K N^i \\ \frac{\delta N^i}{\delta s} &= -K T^i + \tau B^i \\ \frac{\delta B^i}{\delta s} &= -\tau N^i \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(123\ 1)$$

$$\frac{\delta t^\alpha}{\delta s} = \sigma n^\alpha\ , \quad \frac{\delta n^\alpha}{\delta s} = -\ \sigma t^\alpha \qquad \ldots\ldots(123.2)$$

இங்கு T^i, N^i, B^i என்னும் வெளி வெக்டர்களும், t^α, n^α என்னும் தள வெக்டர்களும் வளைவின் P என்னும் புள்ளியில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டவை.

மேலும் $T^i = x^i_\alpha\ t^\alpha$ $\qquad \ldots\ldots(123.3)$

s ஐப் பொருத்து உள்ளார்ந்த வகையிட

$$\frac{\delta T^i}{\delta s} = x^i_\alpha \frac{\delta t^\alpha}{\delta s} + x^i_{\alpha\,,\,\beta} \frac{du^\beta}{ds}\, t^\alpha$$

123.1, 123.2 இவற்றைப் பயன்படுத்த

$$KN^i = x^i_\alpha (\sigma n^\alpha) + x^i_{\alpha,\beta} t^\beta t^\alpha$$

$$= \sigma x^i_\alpha n^\alpha + x^i_{\alpha,\beta} t^\alpha t^\beta$$

118.8 ஐ பயன்படுத்த

$$KN^i = \sigma n^i + b_{\alpha\beta} \xi^i t^\alpha t^\beta \qquad \ldots\ldots(123.4)$$

[n^i என்பது n^α க்குச் சரியான வெளி வெக்டர் என்க]

ξ^i ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$K \xi_i N^i = \sigma \xi_i n^i + b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta$$

அதாவது $K \cos \theta = 0 + b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta$ [$\because$ n^i தளத்தில் அமைந்தது.]

$$\therefore K \cos \theta = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \qquad \ldots\ldots(123.5)$$

$b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta$ ஒரு மாற்றமிலி எனவே தளத்தின் மேல் P ல் ஒரு தொடு கோடு t^α உடைய எல்லா வளைவுகளுக்கும் Pல் அது ஒரே மதிப்பு உடையது எனவே அவ்வளைவுகளுக்கு $K \cos \theta$ வும் ஒரு மாறிலி ஆகும்.

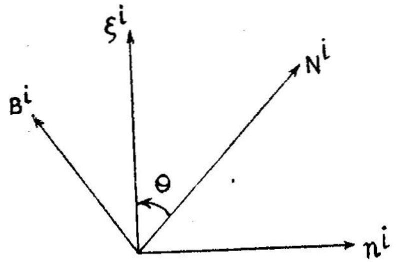
வரையறை : $K \cos \theta$ என்னும் இம்மாறிலியை P என்னும் அப் புள்ளியில் t^α ன் திசையில் **தளத்தின் செங்குத்துக் கோட்டம்** (Normal Curvature of the surface) என்கிறோம். அதை $K_{(n)}$ என்னும் குறியீட்டால் குறிக்கிறோம்.

எனவே $$K_{(n)} = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \qquad \ldots\ldots(223.6)$$

$$= \frac{b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta} \qquad \ldots\ldots(123.7)$$

குறிப்பு 1: குறிப்பாக தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஒரு சமதள வெட்டுமுகத்தை எடுத்துக்கொண்டால் $\theta = 0$ அல்லது π ஆகிறது. எனவே $K_{(n)} = K \cos 0$ அல்லது $K \cos \pi$ அதாவது $K_{(n)} = +K$ அல்லது—K எனவே எந்த ஒரு திசையிலும் தளத்தின் செங்குத்துக் கோட்டம் அந்தத்திசையில் தளத்தினுடைய செங் குத்துச் சமதள வெட்டு முகத்தின் கோட்டத்திற்கு அளவில் சமம் ஆகும். இக்காரணம் பற்றியே $K \cos \theta$ ஐ "செங்குத்துக் கோட்டம்" என்கிறோம்.

குறிப்பு 2:



n^i வெக்டர் T^i க்குச் செங்குத்தானதால் அது ξ^i, N^i இரண்டுமுள்ள சமதளத்தில் உள்ளது. மேலும் அது தளத்திற்குத் தொடு கோடாய் அமையும். எனவே N^i, n^i இவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணம் $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

123.4 ஐ n^i ஆல் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$K\, n_i\, N^i = \sigma n_i n^i + b_{\alpha\beta}\ t^\alpha\ t^\beta\ n_i\, \xi^i$$

$$K \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sigma + 0$$

எனவே $\sigma = K \sin\theta$ ......(123.8)

குறுக்கடி வழியே $\sigma = 0$.

எனவே 123.8 ல் இருந்து குறுக்கடி வழியே

$K = 0$ அல்லது $\theta = 0$.

அதாவது $K = 0$ அல்லது $N^i = \pm \xi^i$

எனவே தளத்தின்மேல் ஒரு குறுக்கடி என்பது ஒரு நேர் கோடோ அன்றி ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் முதன்மைச் செங்குத்தும் தளச்செங்குத்தும் ஒரே திசையினவாகவுள்ள ஒரு வளைவோ ஆகும். மறுதலையாக $N^i = \pm \xi^i$ ஆயின் $\theta = 0$ எனவே $\sigma = 0$ அதாவது அந்த வளைவு ஒரு குறுக்கடியாகும்.

குறிப்பு 3: 123.6 ஐ 123.4-ல் பயன்படுத்த

$$K\, N^i = \sigma\ n^i + K_{(n)}\, \xi^i \qquad ......(123.9)$$

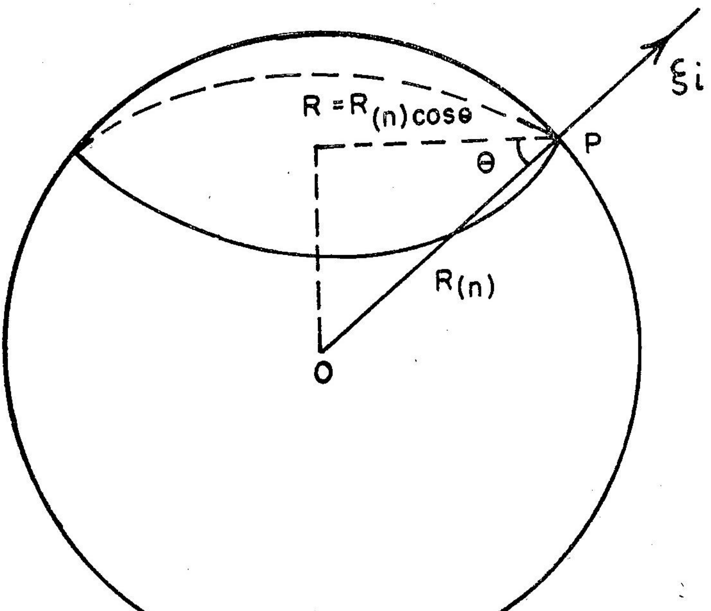
எனக்கிடைக்கிறது.

இது வெளிக் கோட்டம் K, செங்குத்துக் கோட்டம் $K_{(n)}$, குறுக்கடிக் கோட்டம் σ இவற்றிடையே உள்ள தொடர்பு ஆகும்.

குறிப்பு 4: மெசுனியரின் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்:- "ஒரு தளத்தில் அமைந்த ஒரு வளைவின் ஒரு புள்ளி யில் கோட்ட ஆரம் (radius of curvature) $R=\frac{1}{K}$, அதற்குச் சரியான செங்குத்து வெட்டு முகத்தின் கோட்ட ஆரம் $R_{(n)}=\frac{1}{K_{(n)}}$ ம், தள செங்குத்து, வளைவின் முதன்மைச் செங்குத்து இவற்றிற்கிடைக் கோணத்தின் கொசைன் விகிதமும் பெருக்கி வரும் பலனுக்குச் சமம் ஆகும்"

அதாவது $R=\pm R_{(n)}\cos\theta$.

தளம் ஒரு கோளதளமாகவும், வளைவு அதன் மேலுள்ள வட்டமாகவும் இருப்பின் மேற் கூறப்பட்ட முடிவு தெளிவு. ஏனெனில் கோளத்தின் ஒவ்வொரு செங்குத்து வெட்டுமுகமும் ஒரு பெரு வட்டமாகும். C என்பது கோளத்தின் மேல் வரையப்பட்ட ஏதோவொரு வட்டம் எனில் மேற்கண்ட முடிவு எளியவடிவ கணித முடிவுகளிலிருந்தே பெறப்படுகிறது.



குறிப்பு 5: எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட தளம் S, சமதளமாக இருந்தால் அதன் செங்குத்துக் கோட்டம் $K_{(n)}$, எல்லாப் புள்ளிகளும் பூச்சியம். தளம் S, ஒரு கோளதளமாயின் $K_{(n)} = \frac{1}{\text{கோளத்தின் ஆரம்.}}$ எனவே 123.7 லிருந்து S சமதளமாயின் $b_{\alpha\beta} = 0$; S_1 கோளதளமாயின் $b_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} =$

$$\frac{1}{R}\; a_{\alpha\beta}\, du^{\alpha} du^{\beta}$$

எனவே தளத்தின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும்

$$a_{\alpha\beta} = R\, b_{\alpha\beta}.$$

124. தளத்தின் முதன்மைக் கோட்டங்கள் (The principal curvatures of a surface)

t^{α} திசையில் உள்ள, தளத்தின் செங்குத்துக் கோட்டம் $K_{(n)}$ பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படுகின்றது.

$$K_{(n)} = b_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} \qquad \text{......(124.1)}$$

இங்கு t^{α},

$$a_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} = 1 \qquad \text{......(124.2)}$$ ஐ

நிறைவு செய்கின்றது.

124.2 எனும் கட்டுப்பாட்டுக்குட்பட்டு 124.1 ஆல் தரப்படும் $K_{(n)}$ ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காண்போம். இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் 55.7, 55.11 இவற்றோடு ஒப்புநோக்க $K_{(n)}$ ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் $b_{\alpha\beta}$ ஆல் உறுதி செய்யப்படும் முதன்மைத் திசைகளால் தரப்படுகின்றன என்று அறிகிறோம். அதாவது அவை

$\left| b_{\alpha\beta} - \lambda\, a_{\alpha\beta} \right| = 0$ எனும் அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்.

சமன் பாட்டை விரித்தெழுத

$\lambda^2 - a^{\alpha\beta}\, b_{\alpha\beta}\, \lambda + \frac{b}{a} = 0$ என்றாகிறது.

அதாவது $\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$ ......(124.3)

இந்தச் சமன்பாட்டின் மூலங்களான $K_{(1)}, K_{(2)}$ என்பனவற்றை அந்தப் புள்ளியில் **தளத்தின் முதன்மைக் கோட்டங்கள்** என்கிறோம். இவற்றிக்குச் சரியான திசைகள் $t^{\alpha}_{(1)}, t^{\alpha}_{(2)}$ என்பனவற்றை அந்தப் புள்ளியில் **தளத்தின் முதன்மைத் திசைகள்** என்கிறோம்.

அடுத்து, 124.3 ன்படி

$$\left.\begin{aligned} K_{(1)} + K_{(2)} &= 2H \\ K_{(1)} \cdot K_{(2)} &= K \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(124.4)$$

இதில் முதல் சமன்பாட்டில் இருந்து H ன் பெயர்க்காரணம் விளங்குகிறது.

இரண்டாவதிலிருந்து காசின் கோட்டம் K முதன்மைக் கோட்டங்களின் பெருக்குத் தொகைக்கு சமம் எனத் தெரிகிறது. மேலும் K என்பது $a_{\alpha\beta}$ ஐப் பொருத்த, தளத்தின் உள்ளார்ந்த தன்மை எனவே இரண்டாம் சமன்பாட்டின் முடிவை ஒரு தேற்றமாக எழுதுகிறோம்: "ஒரு தளத்தின் முதன்மைக் கோட்டங்களின் பெருக்கற்பலன் தளத்தின் உள்ளார்ந்த மாற்றமிலியான K எனும் காசின் கோட்டமாகும்." இதை **காசின் தேற்றம்** (Gauss's theorem) என்கிறோம்.

மேலும் 55.6 ன் படி $t^{\alpha}_{(1)}, t^{\alpha}_{(2)}$ என்னும் முதன்மைத் திசைகள்.

$$\left(b_{\alpha\beta} - K_{(1)}\, a_{\alpha\beta}\right) t^{\beta}_{(1)} = 0 \qquad \ldots\ldots(124.5)$$

$$\left(b_{\alpha\beta} - K_{(2)}\, a_{\alpha\beta}\right) t^{\beta}_{(2)} = 0 \qquad \ldots\ldots(124.6)$$

என்ற சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன. இவற்றை முறையே $t^{\alpha}_{(2)}, t^{\alpha}_{(1)}$ ஆல் பெருக்கிக் கழிக்க

$$\left[K_{(2)} - K_{(1)}\right] a_{\alpha\beta}\, t^{\beta}_{(1)}\, t^{\beta}_{(2)} = 0 \qquad \ldots\ldots(124.7)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$$K_{(1)} \neq K_{(2)} \text{ எனில் } a_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}_{(1)}\, t^{\beta}_{(2)} = 0$$

எனவே ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் முதன்மைத் திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. $K_{(1)} = K_{(2)}$ எனின் அப்புள்ளியில் ஒவ்வொரு திசையும் முதன்மைத் திசையாகும்.

வரையறை : ஒரு தளத்தின்மேல் அமைந்த ஒரு வளைவின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடுகோடு அப்புள்ளியில் முதன்மைத் திசைகளின் ஒன்றின் திசையில் உள்ளவாறு அமைந்திருந்தால் அவ்வளைவை கோட்ட வளைவு (line of curvature) என்கிறோம்.

அதாவது du^{α} என்பது கோட்ட வளைவின் வழியே இடப் பெயர்ச்சி எனில் அது $\underset{(1)}{t}^{\alpha}$ அல்லது $\underset{(2)}{t}^{\alpha}$ க்கு விகிதசமம் உடையது.

முடிவு : கோட்ட வளைவுகளின் சமன்பாடுகளை

$h_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} = 0$ என எழுதலாம். இங்கு $h_{\alpha\beta} = \varepsilon^{r\delta}\, a_{\alpha r}\, b_{\beta\delta}$

நிரூபணம் : 124.5 ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$b_{1\beta}\, \underset{(1)}{t}^{\beta} = K_{(1)}\, a_{1\alpha}\, \underset{(1)}{t}^{\alpha}$$

$$b_{2\beta}\, \underset{(1)}{t}^{\beta} = K_{(1)}\, a_{2\alpha}\, \underset{(1)}{t}^{\alpha}$$

இவற்றிடையே $K_{(1)}$ ஐ நீக்க

$$a_{1\alpha}\, \underset{(1)}{t}^{\alpha}\, b_{2\beta}\, \underset{(1)}{t}^{\beta} = a_{2\alpha}\, \underset{(1)}{t}^{\alpha}\, b_{1\beta}\, \underset{(1)}{t}^{\beta}$$

அதாவது $\underset{(1)}{t}^{\alpha}$ என்னும் திசை

$$\varepsilon^{r\delta}\, a_{\alpha r}\, b_{\beta\delta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} = 0 \qquad \ldots\ldots(124.8)$$

எனும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது. இது போன்றே $\underset{(2)}{t}^{\alpha}$ ம் அதே சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

எனவே 124.8 முதன்மைத் திசைகளின் கூட்டுச் சமன்பாடு ஆகும்.

$\varepsilon^{r\delta}\, a_{\alpha r}\, b_{\beta\delta} = h_{\alpha\beta}$ எனக் கொண்டால்

124.8 ஐ $h_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} = 0 \qquad \ldots\ldots(124.9)$

என எழுதலாம்.

ஆனல் கோட்டவளைவின் வழியே du^{α} என்பது $t^{\alpha}_{(1)}$ அல்லது $t^{\alpha}_{(2)}$ க்கு விகிதசமம் உடையது எனவே 124.9, கோட்ட வளைவின் வழியே $h_{\alpha\beta}\ du^{\alpha}\ du^{\beta} = 0$ என்றாகிறது.

எனவே ஒரு தளத்தில் கோட்ட வளைவின் சமன்பாடு

$$h_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} = 0 \qquad \text{......(124.10)}$$

125. ரோட்ரிக்கின் சூத்திரங்கள் (Rodrigue's formulae)

ஒரு தளத்தின் மேல் அமைந்த ஒரு கோட்ட வளைவின் வழியே $\frac{\delta \xi^i}{\delta s} + K\ \frac{dx^i}{ds} = 0$. இங்கு K என்பது அப்புள்ளியில் கோட்ட வளைவின் திசையில் அமைந்துள்ள முதன்மைக் கோட்டம்.

நிருபணம்: வெயின் கார்டன் சூத்திரங்களின்படி

$$\xi^i_{;\,\alpha} = -a^{r\beta}\ b_{\alpha r}\ x^i_{\beta}$$

t^{α} உடன் அகப்பெருக்கல் செய்ய

$$\xi^i_{;\,\alpha}\, t = -a^{r\beta}\, b_{\alpha r}\, x^i_{\beta}\, t^{\alpha}$$

அதாவது

$$\frac{\delta \xi^i}{\delta s} = -a^{r\beta}\, b_{\alpha r}\, x^i_{\beta}\ t^{\alpha} \qquad \text{......(125.1)}$$

அடுத்து K என்பது ஒரு முதன்மைக் கோட்டமெனில் $b_{\alpha\beta}\ t^{\beta} = K\, a_{\alpha\beta}\ t^{\beta}$ என்பது ஒரு முதன்மைத் திசைக்குப் பொருந்தும். எனவே கோட்ட வளைவின் வழியே ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உண்மை.

125.1 ல் பிரதியிட

$$\frac{\delta \xi^i}{\delta s} = -a^{r\beta}\ K a_{\alpha r}\ t^{\alpha}\ x^i_{\beta}$$

$$= -K\, \delta^{\beta}_{\alpha}\ t^{\alpha}\ x^i_{\beta}$$

$$= -K\, t^{\beta}\ x^i_{\beta}$$

$$= -K \frac{dx^i}{ds}$$

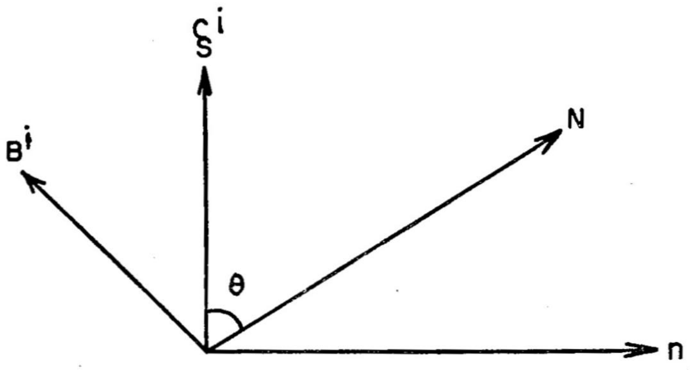
$$\therefore \quad \frac{\delta \xi^i}{\delta s} + K\frac{dx^i}{ds} = 0$$ என்பன ஓர் கோட்ட வளைவின் வழியே உண்மை. இவற்றை ரோட்ரிக்கின் சூத்திரங்கள் என்கிறோம்.

126. தளத்தில் வளைவின் குறுக்கடி முறுக்கம் (The geodesic torsion of a curve on a surface)

ξ^i, N^i இவற்றிற்கு இடையே உள்ள கோணம் θ என்க. இது N^i ல் இருந்து B^i க்கு உள்ள திசையை மிகைத் திசையாகக் கொண்டு, அத்திசையில் அளக்கப்பட்டது.

எனவே

$$\cos \theta = \xi^i N_i \qquad \ldots\ldots(126.1)$$



s யைப் பொருத்து வகையிட

$$-\sin\theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{\delta\xi^i}{\delta s} N_i + \xi^i \frac{\delta N_i}{\delta s}$$

$$= \frac{\delta\xi^i}{\delta s} N_i + \xi^i (\tau B_i - K\, T_i) \text{ (ஃப்ரெனெ சூத்திரம்)}$$

$$= \frac{\delta\xi^i}{\delta s} N_i + \tau \sin\theta$$

$$-\sin\theta\left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{\delta\xi^i}{\delta s} N_i$$

125 1 ஐ பயன்படுத்த

$$-\sin\theta\left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) = -a^{r\beta}\, b_{\alpha r}\, x^i_{\beta}\, t^{\alpha}\, N_i$$

ஆனல் படத்திலிருந்து $N_i = \xi_i \cos\theta + n_i \sin\theta$. பிரதியிட

$$\sin\theta\left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) = a^{r\beta}\, b_{\alpha r}\, x^i_\beta\, t^\alpha\, [\xi_i \cos\theta + n_i \sin\theta]$$

$$= a^{r\beta}\, b_{\alpha r}\, x^i_\beta\, t^\alpha\, n_i \sin\theta$$

எனவே $$\tau + \frac{d\theta}{ds} = a^{r\beta}\, b_{\alpha r}\, n_\beta\, t^\alpha$$

$$= b_{\alpha r}\, n^r\, t^\alpha$$

114.9 ன்படி $n^r = \varepsilon^{\beta r}\, t_\beta$

பிரதியிட

$$\tau + \frac{d\theta}{ds} = \iota^{\beta r}\, b_{\alpha r}\, t^\alpha\, t_\beta$$

$$= t^{r\delta}\, b_{\alpha\delta}\, t^\alpha\, t_r \quad \text{(போலிச் சுட்டிணைப்புகளை மாற்ற)}$$

$$= t^{r\delta}\, b_{\beta\delta}\, \iota^\beta\, t_r$$

$$= t^{r\delta}\, b_{\beta\delta}\, a_{ra}\, t^\beta\, t^a$$

$$= h_{a\beta}\, t^a\, \iota^\beta$$

$$\therefore \tau + \frac{d\theta}{ds} = h_{a\beta}\, t^a\, \iota^\beta \qquad \text{......(126.2)}$$

எனவே தளத்தின் மேல் t^α எனும் ஒரே தொடுகோட்டை உடைய எல்லா வளைவுகளுக்கும் $\tau + \frac{d\theta}{ds}$ ஒரு மாற்றமிலி. குறிப்பாக t^α ன் திசையில் ஒரு குறுக்கடியை எடுத்துக்கொண்டால் $\theta = 0$ அல்லது π ஆகிறது. எனவே $\tau \frac{d\theta}{ds}$ குறுக்கடியின் முறுக்கம் ஆகிறது.

வரையறை : தளத்தின்மேல் அமைந்த வளைவின் ஏதோ ஒரு புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம். அந்த வளைவை அந்தப் புள்ளியில் தொடும் குறுக்கடியின் முறுக்கத்தை அப்புள்ளியில் **வளைவின் குறுக்கடி முறுக்கம்** (geodesic torsion of the curve) என்கிறோம். அதை $\tau_{(g)}$ ஆல் குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே $\tau_{(g)} = \tau + \frac{d\theta}{ds} = h_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta}$ ......(126.3)

127. அணுகு வளைவுகள் (The asymptotic lines)

ஒரு தளத்தின்மேல் ஒரு புள்ளியில்

$$b_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} = 0 \qquad ......(127.1)$$

அதாவது $b_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} = 0$ எனும் சமன்பாடுகளால் வரையறை செய்யப்படும் திசைகளை அப்புள்ளியில் **அணுகு திசைகள்** (asymptotic directions) என்கிறோம். ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அணுகு திசை களில் தொடுகோடுகள் கொண்ட தள வளைவுகளை தளத்தில் **அணுகு வளைவுகள்** என்கிறோம். ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் இரு அணுகு திசைகள் உள்ளன. எனவே தளத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளி வழியாக வும் இரு அணுகு வளைவுகள் செல்கின்றன.

எந்த ஒரு அணுகு வளைவிற்கும் 123.4 ன் படி

$$K\, N^{i} = \sigma\, n^{i} \qquad ......(127.2)$$

மேலும் 123.5 ன் படி

$$K \cos \theta = 0$$

எனவே $K = 0$ அல்லது $\theta = 90°$ அதாவது $N^{i} = \pm n^{i}$

127.2 ன் படி $K = 0$ ஆயின் $\sigma = 0$

அல்லது

$N^{i} = \pm n^{i}$ ஆயின் $K = \neq \sigma$

எனவே எந்தவொரு அணுகு வளைவிற்கும் $K = \sigma = 0$ அல்லது $K = \pm\sigma$, $N^{i} = \pm n^{i}$ அதாவது அணுகு வளைவிற்கு $K = \sigma = 0$ அல்லது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சாதாரண கோட்டமும், குறுக்கடிக் கோட்டமும் அளவில் சமமாக இருப்பதோடு, முதன்மைச் செங்குத் குத்தும் தளத்தில் அமைந்திருக்கும்.

மேலும் $N^{i} = \pm n^{i}$ ஆதலின் $B^{i} = \pm \xi^{i}$.

128. என்னெபரின் சூத்திரம் (Enneper's formula)

இச் சூத்திரம் அணுகு வளைவின் குறுக்கத்தைத் தருகிறது.

" K என்பது தளத்தின் காசின் கோட்டம் எனில் அணுகு வளைவின் முறுக்கம் $\pm\sqrt{-K}$ ஆகும்".

நிருபணம்: அணுகு வளைவிற்கு

$$B^i = \pm \xi^i$$

இந்த சமன்பாட்டை உள்ளார்ந்த வகையிட

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = \pm \frac{\delta \xi^i}{\delta s} \qquad \ldots\ldots(128.1)$$

ஆனால்

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = -\tau\ N^i \text{ (ஃப்ரெனே சூத்திரப்படி)}$$

$$\frac{\delta \xi^i}{\delta s} = \xi^i_{;\alpha}\ t^\alpha$$

128.1 ல் பிரதியிட

$$-\tau\ N^i = \pm \xi^i_{;\alpha}\ t^\alpha$$

அடுத்து $\tau^2 = g_{ij}\,(\tau N^i)\,(\tau N^j)$

$$= g_{ij}\left(-\xi^i_{;\alpha}\ t^\alpha\right)\left(-\xi^i_{;\beta}\ t^\beta\right)$$

$$= g_{ij}\,\xi^i_{;\alpha}\,\xi^i_{;\beta}\ t^\alpha\ t^\beta \text{ (119.9 ஐ பயன்படுத்த)}$$

$$= C_{\alpha\beta}\ t^\alpha\ t^\beta \qquad \ldots\ldots(128.2)$$

மேலும் $C_{\alpha\beta} - 2\,H\,b_{\alpha\beta} + K\,a_{\alpha\beta} = 0$

அதாவது

$$C_{\alpha\beta}\ t^\alpha\ t^\beta - 2\,H\,b_{\alpha\beta}\ t^\alpha\ t^\beta + K\,a_{\alpha\beta}\ t^\alpha\ t^\beta = 0$$

t^α அணுகு திசையானல்

$$C_{\alpha\beta}\ t^\alpha\ t^\beta = -K\,a_{\alpha\beta}\ t^\alpha\ t^\beta$$

$$= -K.1$$

128.2 ல் பிரதியிட

$$\tau^2 = -K$$

எனவே அணுகு வளைவிற்கு

$$\tau = \pm\sqrt{-K.}$$

129. சில வரையறைகள்.

சில வரையறைகளுடன் இந்த அதிகாரத்தை முடிக்கிறோம்.

வரையறை 1 : ஒரு தளத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் காசின் கோட்டம் K மிகைத்தன்மை யுடையதாக இருந்தால் அந்தத் தளத்தை **மிகைக் கோட்டத்தளம்** (Surface of positive curvature) என்கிறோம். எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $K<0$ எனில் அத்தளம் **குறைக்கோட்டத் தளம்** எனப்படும்.

குறிப்பு : $K = \dfrac{b}{a} = \dfrac{b_{11}b_{22}-b_{12}{}^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}$

$K>0$ எனில் $b_{11}b_{22} - b_{12}{}^2 >0$

மேலும் $K_{(n)} = b_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta}$ ஆதலின் மிகைக் கோட்டத் தளத்தின் எல்லா செங்குத்து வெட்டு முகங்களிலும், முதன்மை ஆரங்கள் $R_{(n)} = \dfrac{1}{K(n)}$ மாறுபட்ட குறிகளை உடையன அல்ல. $K<0$ எனில் முதன்மை ஆரங்கள் குறிகளில் மாறுபடுகின்றன.

$K=0$ எனில் $K_{(n)} = b_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} = 0$ எனவே $R_{(n)} = \infty$.

வரையறை 2 : ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியில் முதன்மைக் கோட்டங்கள் $K_{(1)}$, $K_{(2)}$ ஒரே குறி உடையனவாக இருப்பின் அந்தப் புள்ளியை **நீள்வட்டப் புள்ளி** (Elliptic point) என்கிறோம். அவை மாற்றுக் குறியுடையனவாக இருப்பின் புள்ளியை **அதிபரவளையப் புள்ளி** (hyperbolic) என்றும் அவற்றில் ஏதோ ஒன்று பூச்சியமானால் புள்ளியை **பரவளையப் புள்ளி** (parabolic) என்றும் கூறுகிறோம். $K_{(n)}$ களின் எல்லாமதிப்புகளுக்கும் $K_{(1)} = K_{(2)}$ எனின் புள்ளியைக் **கோளப் புள்ளி** (Spherical) அல்லது **உந்திப் புள்ளி** (umbilical) என்கிறோம். ஓர் உந்திப்புள்ளியில் ஒவ்வொரு திசையும் முதன்மைத் திசையாகும் என முன்னரே கண்டோம்.

பயிற்சி

1. பின்வரும் தளங்களுக்கு $(ds)^2$ ன் உருக்கள் கொடுக்கப் பட்டவாறு உள்ளன என நிரூபி.

(i) $y^1 = a\cos u^1 \cos u^2,\ y^2 = a\cos u^2 \sin u^2,$
$y^3 = a \sin u^1$ என்னும் கோளம்.
$(ds)^2 = a^2\,(du^1)^2 + a^2\,(\cos u^1)^2\,(du^2)^2.$

(ii) $y^1 = a \cos u^1$, $y^2 = a \sin u^1$, $y^3 = u^2$ என்னும் வட்ட உருளை

$$(ds)^2 = (a\, du^1)^2 + (du^2)^2$$

(iii) பின்வரும் துருவ இலக்கெண்களால் கொடுக்கப்படும் சமதளம் $y^3 = 0$.

$$y^1 = u^1 \cos u^2,\ y^2 = u^1 \sin u^2,\ y^3 = 0$$

$$(ds)^2 = (du^1)^2 + (u^1\, du^2)^2$$

(iv) $y^1 = u^1$, $y^2 = u^2$, $y^3 = f(u^1, u^2)$

$$(ds)^2 = (1 + f_1{}^2)\,(du^1)^2 + 2 f_1 f_2\, du^1\, du^2$$

$$+ (1 + f_2{}^2)\,(du^2)^2,$$ இங்கே $f_\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial u^\alpha}$.

2. ஒரு தளத்தில் இலக்கெண் வளைவுகள் செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொண்டால் பின்வருவனவற்றை நிரூபி.

(i) $a_{12} = a^{12} = 0,\ a^{11} = \dfrac{1}{a_{11}},\ a^{22} = \dfrac{1}{a_{22}}$

(ii) $[11, 1] = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial u^1}$, $[12, 1] = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial u^2} = -[11, 2]$

$[22, 1] = -\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial a_{22}}{\partial u^1} = -]12, 2]$, $[22, 2] = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial a_{22}}{\partial u^2}$

(iii) $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{2\, a_{11}} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial u^1}$, $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{2 a_{11}} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial u^2}$

$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\dfrac{1}{2 a_{11}} \dfrac{\partial a_{22}}{\partial u^1}$, $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = -\dfrac{1}{2\, a_{22}} \dfrac{\partial a_{11}}{\partial u^2}$

$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{2 a_{22}} \dfrac{\partial a_{22}}{\partial u^1}$, $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \dfrac{1}{2 a_{22}} \dfrac{\partial a_{22}}{\partial u^2}$

3. கோள தளத்திற்கும், வட்ட உருளைத் தளத்திற்கும் கிறித்தஃபல் குறியீடுகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

4. $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = 0$, $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = 0$ என்பன u^1 வளைவுகளும் u^2 வளைவுகளும் குறுக்கடிகளாக இருப்பதற்குக் கட்டுப்பாடுகள் என்று நிரூபி. இலக்கெண் அமைப்பு செங்கோண வளைகோட்டியதாக இருப்பின் மேற்கண்ட கட்டுப்பாடுகளை மேலும் எளிதாக்குக.

5. இலக்கெண் வளைவுகளின் குறுக்கடிக் கோட்டங்கள் பின்வரும் சமன்பாடுகளால் தரப்படுகின்றன என்று காட்டு.

$$\sigma_{(1)} = \sqrt{\frac{a}{(a_{11})^3}} \left\{\frac{2}{11}\right\}, \quad \sigma_{(2)} = -\sqrt{\frac{a}{(a_{22})^3}} \left\{\frac{1}{22}\right\}$$

6. S: $y^1 = u^1 \cos u^2$
$y^2 = u^1 \sin u^2$
$y^3 = u^1$ என்னும் வட்ட உருளையின் மேல் உள்ள

$C : u^1 = a,\ u^2 = u^2$ என்னும் வளைவை எடுத்துக் கொள்க. s என்பது C ன் வழி அளக்கப்படும் வில்தூரம் எனில் C ன் சமன்பாடுகளை $u^1 = a,\ u^2 = \frac{s}{a}$ என எழுதலாம் என நிரூபி.

$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2a}$ என்றும் காட்டுக.

7. $y^1 = u^1 \cos u^2,\ y^2 = u^1 \sin u^2,\ y^3 = f(u^1)$ என்னும் சுழற்சித் தளத்தில் $u^1 =$ மாறிலி என்னும் வளைவுகள் மாறுத குறுக்கடிக் கோட்டமுடையன என நிரூபி.

8. வெளியின் இலக்கெண் அமைப்பு செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பு எனில்

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} x^j_{,1} x^k_{,2}$$

9. $g_{mn} \xi^m_{;\alpha} x^n_\beta = -b_{\alpha\beta}$ என நிரூபி.

10. $\beta^{r\delta} = \dfrac{|b_{r\delta}| \text{ ல் } b_{r\delta} \text{ ன் இணைச்சிறை}}{|b_{r\delta}|}$ எனில்

$$x^i_\alpha = -a_{\alpha\delta}\, \beta^{r\delta} \xi^i_{;r}$$ என நிரூபி.

11. $a^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = 4H^2 - 2K$ என்று நிறுவுக.

12. நிரூபிக்க : $g_{mn}\, \xi^m \xi^n_{;\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}$

13. தளத்தில் எந்த வளைவிற்கும்

$$K^2 = \sigma^2 + K^2_{(n)}$$ என நிரூபி.

14. t^{α} என்பது தளத்தில் அலகுத் தொடு கோட்டு வெக்டர் எனின் $K=2H\, b_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} - C_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta}$ என்று காட்டுக.

15. ஒரு தளத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளுமே உந்திப் புள்ளிகளாயின் அது ஒரு கோளம் அல்லது ஒரு சமதளம் என நிரூபி.

16. ஒரு தளத்தில் ஒரு புள்ளியில், கோட்ட வளைவு ஒன்றினுக்கும் t^{α} க்கும் இடையே உள்ள கோணம் θ எனில்

$\tau_{(g)} = [K_{(2)} - K_{(1)}] \sin\theta \cos\theta$. என நிரூபி.

17. இலக்கெண் வளைவுகள் கோட்ட வளைவுகள் எனில் $a_{12} = b_{12} = 0$ என நிரூபிக்க. இதன் மறுதலையையும் நிரூபி.

18. t^{α} க்கும் முதன்மைத் திசை $t^{\alpha}_{(1)}$ க்கு இடைக் கோணம் θ எனில் அத்திசையில் செங்குத்துக் கோட்டம் $K_{(n)}$,

$K_{(n)} = K_{(1)} \cos^2\theta + K_{(2)} \sin^2\theta$ என நிரூபி.

19. $\tau^2_{(g)} = C_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\, t^{\beta} - K^2_{(n)}$ என நிரூபி.

20. அணுகு வளைவிற்கு செங்குத்துக் கோட்டம் பூச்சியம் என நிரூபி.

12. துகளின் இயக்கவிசையியல்
(Dynamics of a particle)

இந்த அதிகாரத்தில் ஒரு யூக்லிடின் முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு துகளின் இயக்கத்தைப் பற்றிக் கற்க பண்புரு கணிதம் எவ்வாறு பயன்படுகிறது எனக் காண்போம். பண்புருக் குறியீட்டு முறை இயக்க விசையியல் முடிவுகள் பலவற்றை உருவாக்குவதை எளிதாக்குகின்றது.

130. அடிப்படைக் கருத்துக்கள் (basic concepts)

ஒரு துகள்.ஒரு தொகுதி சுட்டச்சுக்களைப் (axes of reference) பொருத்து தன் அமைநிலையை மாற்றிக் கொண்டால் அது அந்த சுட்டச்சு அமைப்பில் இடப்பெயர்ச்சி அடைகிறது அல்லது நகருகிறது என்கிறோம்.

ஒரு முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். நேரம் 't' ஆகும் போது P என்ற ஒரு துகளின் அமைநிலை x^i என்க. t மாறும் போது P வெளியில் C என்னும் வளைவு வழியே செல்கின்றது. C யைப் P ன் கடவுபாதை (trajectory) என்கிறோம். இலக்கெண்களை t ன் சார்புகளாக அமைப்பதன் மூலம், C ன் சமன்பாடுகளை எழுதலாம்.

$$x^i = x^i(t) \qquad \text{......(130.1)}$$

என்பன C ன் சமன்பாடுகள் என்க.

நேரம் t ஆகும் பொழுது P ன் அமைநிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$ எனில், P ன் திசைவேகம் (velocity) $\mathbf{v}$ பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப் படுகின்றது.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

கூறுகளை எழுத

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \qquad \ldots\ldots(130.2)$$

அடுத்து $\bar{x}^j$ என்பன புதிய அமைப்பில் P ன் இலக்கெண்களாயின்

$$\bar{v}^j = \frac{d\bar{x}^j}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} v^i$$

எனவே v^i என்பன திசைவேக வெக்டர் $\mathbf{v}$ ன் முரண்மாறிக் கூறுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்கொண்ட இலக்கெண் அமைப்பு செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பு எனில் $\frac{dx^i}{dt}$ என்பன அச்சுக்களின் திசைகளில் திசைவேகத்தின் கூறுகள் ஆகும்.

அடுத்து $\mathbf{f}$ என்பது முடுக்க வெக்டர் (acceleration vector) எனில்

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

70.2 ன்படி

$$f^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \qquad \ldots\ldots(130.3)$$

இலக்கெண் அமைப்பு செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பு எனில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன.

எனவே $f^i = \frac{d^2x^i}{dt^2}$. அதாவது இவ்வமைப்பில் இலக்கெண் அச்சுகளின் திசைகளில் $\frac{d^2x^i}{dt^2}$ என்பன முடுக்கத்தின் கூறுகள் ஆகும்.

ஒரு துகளின் பொருண்மை (mass) எந்த ஓர் இலக்கெண் அமைப்பையும் சார்ந்த அளவு அல்ல என்பது தெளிவு. எனவே அது ஒரு மாற்றமிலி; அதாவது ஒரு பூச்சிய அடைவுப் பண்புரு. அதை m ஆல் குறிக்கிறோம்.

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி m பொருண்மையுடைய ஒரு துகளின் மேல் செயல்படும் $\mathbf{F}$ என்னும் விசை பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படும்.

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

அதாவது $$F^i = m\frac{\delta v^i}{\delta t} = mf^i \qquad \ldots\ldots(130.4)$$

F^i எனும் முரண்மாறி வெக்டர் ஆனது விசை வெக்டர் ஆகும்.

130.4 ல் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் வளைகோட்டிய இலக்கெண் அமைப்பில் இயக்கச் சமன்பாடுகள் (equations of motion) ஆகும் செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பில் அவை நமக்குப் பழக்கமான $F^i = m\dfrac{d^2x^i}{dt^2}$ என்ற உருவத்தில் இருக்கின்றன.

முடிவு 1 : ஒரு துகளின் திசை வேகம், சீரானதாக இருப்பின் $f^i=0$.

நிரூபணம்: ஒரு துகளின் திசைவேகம் சீரானதாக இருப்பின் அதன் அளவும், திசையும் மாறிலிகள்.

மேலும் $$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= T^i v$$ [T^i அலகு தொடுகோட்டு வெக்டர் v—திசைவேகத்தின் அளவு]

$$= v\,T^i$$

எனவே $$f^i = \frac{\delta v^i}{\delta t} = v\frac{\delta T^i}{\delta t} + \frac{dv}{dt}\ T^i$$

v^i ன் திசையும், அளவும் மாறிலிகள் ஆதலின் T^i, v மாறிலிகள்,

எனவே $\dfrac{\delta T^i}{\delta t} = 0$, $\dfrac{du}{dt} = 0$ ஆகவே $f^i = 0$.

முடிவு 2 : ஒரு துகளின் திசைவேகத்தின் அளவு மாறிலி யானுல், அதன் முடுக்க வெக்டர், பூச்சியமாகவோ அல்லது திசைவேக வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவோ இருக்கும்.

v என்பது திசைவேகத்தின் அளவு எனில்

$$v^2 = g_{mn}\, v^m v^n$$

உள்ளார்ந்த வகையிட

$$2v\frac{dv}{dt} = 2\, g_{mn}\, v^m\ \frac{\delta v^n}{\delta t}$$

$$\left[v \text{ அளவை ஆதலின் } \frac{dv}{dt} = \frac{\delta v}{\delta t}\right]$$

எனவே $$v \frac{dv}{dt} g_{mn} v^m f^n \qquad ......(130.5)$$

திசைவேக, முடுக்க வெக்டர்களுக்கு கிடைக்கோணம் θ எனில்

$$g_{mn} v^m + f^n = vf \cos \theta.$$

130.5 ல் பிரதியிட

$$v \frac{dv}{dt} = v\, \mathrm{f} \cos \theta$$

எனவே $$\frac{dv}{dt} = f \cos \theta.$$

v மாறிலி ஆதலின் $$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\therefore f \cos \theta = 0$$

அதாவது $f = 0$ அல்லது $\theta = \frac{\pi}{2}$

இதுவே வேண்டும் முடிவு.

131. வேலையும் ஆற்றலும் (work and energy)

முந்தைய நூற்பகுதியில் விசையை ஒரு முரண்மாறி வெக்டராக அறிமுகப்படுத்தினோம். ஆனால், வேலை (work) என்னும் கருத்தின் அடிப்படையில் ஓர் உடன்மாறி வெக்டராகவும் அறிமுகப்படுத்தலாம்.

F என்னும் விசை $d\mathbf{r}$ என்னும் இடப்பெயர்ச்சி ஏற்படுத்த செய்யும் வேலையின் மூலம் dw ஐ பின்வருமாறு வரையறை செய்கிறோம்.

$$dw = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
$$= g_{ij} F^i dx^j$$
$$dw = F_j dx^j \qquad ......(131.1)$$

F_j என்பன **F** ன் உடன் மாறிக் கூறுகள்.

வரையறை: m பொருண்மையுடைய ஒரு துகளின் திசை வேகத்தின் அளவு v எனில் $T = \frac{1}{2}mv^2$ என்பது துகளின் இயக்க **ஆற்றல்** (Kinetic energy) ஆகும்.

$$T = \tfrac{1}{2}m\, v^2 = \tfrac{1}{2}m\, g_{ij}\, v^i v^j \qquad ......(131.2)$$

தேற்றம்: ஒரு துகளை, அதன் கடவு பாதையின் வழியே நகர்த்துவதில், ஒரு விசை செய்யும் வேலை அந்தத் துகளின் இயக்க ஆற்றலின் மாற்றத்திற்குச் சமம்.

நிரூபணம்: ஒரு துகளை அதன் கடவு பாதையின் வழியே P_1-ல் இருந்து P_2 க்கு நகர்த்துவதில் F_j என்னும் விசை செய்யும் வேலை W_1 பின்வரும் கோட்டுத் தொகையால் (line integral) கொடுக்கப் படும்.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F_j \, dx^j$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} g_{ij} F^i \, dx^j$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} g_{ij} m \frac{\delta v^i}{\delta t} \, dx^j$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \, g_{ij} \frac{\delta v^i}{\delta t} \frac{dx^j}{dt} \, dt$$

இங்கு t_1, t_2 என்பன P_1, P_2 என்னும் அமைநிலைகளில் துகள் இருக்கும் நேரங்கள்.

அதாவது $$W = \int_{t_1}^{t_2} m \, g_{ij} \frac{\delta v^i}{\delta t} v^j dt \qquad \ldots\ldots (131.3)$$

ஆனால் $\frac{d}{dt}(g_{ij} v^i v^j) = \frac{\delta}{\delta t}(g_{ij} v^i v^j) = 2 g_{ij} \frac{\delta v^i}{\delta t} v^j$

131.3 ல் பிரதியிட

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(g_{ij} v^i v^j) \, dt$$

$$= \left[\frac{m}{2} g_{ij} v^i v^j \right]_{P_1}^{P_2} = \left[\frac{mv^2}{2} \right]_{P_1}^{P_2}$$

$$= \Big[T \Big]_{P_1}^{P_2}$$

$$= T_2 - T_1$$

குறிப்பு 1: W என்பது வேலைச் சார்பு (Work function) எனப் படும்.

குறிப்பு 2: இந்த அதிகாரத்தில் t என்பது காலத்தைக் குறிக்கும். t யைப் பயன்படுத்துவதால் எந்தவித குழப்பமும் நேராது; ஏனெனில் t^{α} ஐ தளத் தொடுகோட்டு வெக்டருக்குப் பயன்படுத்தும்போது கிரேக்கச் சுட்டிணைப்புடனேயே பயன் படுத்தப்படுகிறது. காலத்தைக் குறிக்கும் t க்குச் சுட்டிணைப்பு ஏதும் இல்லை. இதுபோன்றே சுட்டிணைப்புடன் கூடிய T^i தொடு கோட்டு வெக்டரையும், சுட்டிணைப்பு இல்லாத T இயக்க ஆற்றலை யும் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்படும். இதனாலும் எவ்விதக் கருத்துக் குழப்பமும் நேராது.

132. காப்புநிலை விசைக்களம் (Conservative force field)

வரையறை : $W = \int_{P_1}^{P^2} F_i \;\; dx^i$ என்று கண்டோம். இந்தக் கோட்டுத்தொகை P_1 லிருந்து P_2 க்கு எந்தப் பாதையை எடுத்துக் கொண்டாலும் ஒரே மதிப்பு உடையதாக உள்ளவாறு F_i என்னும் விசைக்களம் அமைந்திருக்கலாம். அதாவது W ன் மதிப்பு P_1 லிருந்து P_2 க்குச் செல்லும் பாதையின் சார்பிலாதது. அவ்வாறு இருப்பின் F_i என்னும் விசைக்களத்தைக் **காப்புநிலை விசைக்களம்** என்கிறோம். இந்நிலையில் $F_i \, dx^i$ என்பது ஒரு திருத்தமான வகையீடு (exact differential) ஆகும். இந்நிலையில் வேலைச் சார்பின் குறை மதிப்பு ($-W$) ஐ துகளின் **விசை—நிலைப் பண்பு** (force potential) அல்லது **நிலை ஆற்றல்** (potential energy) என்கிறோம் துகளின் நிலை ஆற்றலை V எனக் குறிக்கிறோம்.

வரையறைப்படி $W = -V$

எனவே $F_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x^i}$

தேற்றம் : ஓர் எளிதாக இணைக்கப்பட்ட பரப்பிடத்தில் (Simply connected region) வரையறை செய்யப்பட்ட F_i என்னும் விசைக்களம் காப்பு நிலையுடையதாக இருத்தற்குத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடு $F_{i,\,j} = F_{j,\,i}$ என்பதாகும்.

நிரூபணம் : F_i என்னும் விசைக்களம் காப்பு நிலையுடையதாக இருக்கத் தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடு $F_i \, dx^i$ என்பது V என்னும் தனிப் பெறுமானச் சார்பின் (single-valued function) திருத்தமான வகையீடாக இருக்க வேண்டும். அதற்குக் கட்டுப்பாடு

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j} = \frac{\partial F_j}{\partial x^i}$$ [இங்கு வகைக்கெழுக்கள் தொடர் சார்புகள் எனக்கொள்ளப்பட்டன]

ஆனால் $F_{i,\,j} - F_{j,\,i} = \frac{\partial F_i}{\partial x^j} - \frac{\partial F_j}{\partial x^i}$

எனவே தேவையும் போதுமான கட்டுப்பாடு $F_{i,\,j} = F_{j,\,i}$

குறிப்பு : ஓர் இணை விசைக்களம் F_i க்கு $F_{i,\,j}=0$. எனவே இணைவிசைக் களம் எப்போதும் காப்பு நிலையுடையது.

133. இலக்ராஞ்சின் இயக்கச் சமன்பாடுகள் (Lagrangian equations of motion)

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிக்கு இயக்க ஆற்றலின் அடிப் படையில் மாற்றுருக் கொடுத்து இலக்ராஞ்ச் ஒரு சூத்திரம அமைத்தார். அச்சூத்திரமே இலக்ராஞ்சின் இயக்கச் சமன்பாடு கள் ஆகும்.

நேரம் 't' ஆகும்போது, துகளின் இயக்க ஆற்றல்

$$T = \frac{m}{2} g_{ij}\, v^i\, v^j = \frac{m}{2}\, g_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j \qquad \ldots\ldots(133.1)$$

$\dot{x}^i$ ப் பொருத்து வகையிட

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = m g_{ij}\, \dot{x}^j \qquad \ldots\ldots(133.2)$$

't' யைப் பொருத்து இதன் வகைக்கெழு

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) = m\left(g_{ij}\, \ddot{x}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\, \dot{x}^k\;\, \dot{x}^j\right) \qquad \ldots\ldots(133.3)$$

T ஐ x^iப் பொருத்துப் பகுதிவகையிட

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{1}{2} m\, \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\;\, \dot{x}^j\;\, \dot{x}^k \qquad \ldots\ldots(133.4)$$

133.3 — 133.4 ஐ எடுத்துக்கொள்ள

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = m\left[g_{ij}\;\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j\,\dot{x}^k\right]$$

$$= m\,[g_{ij}\;\ddot{x}^j + [jk,\, i]\;\dot{x}^j\;\dot{x}^k]$$

$$= m g_{il}\left[\ddot{x}^l + \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix}\;\dot{x}^j\;\dot{x}^k\right]$$

சதுர அடைப்புக்குள் இருக்கும் கோவை முடுக்க வெக்டர் f^l ஆகும்.

எனவே $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = mg_{il}\, f^l = m\, f_i = F_i$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = F_i \qquad \ldots\ldots(133.5)$$

இவையே இலக்ராஞ்சின் இயக்கச் சமன்பாடுகள். எந்த ஒரு சிறப்பு இலக்கெண் அமைப்பிலும் முடுக்க வெக்டரைக் கணக்கிடு வதற்கு இச்சூத்திரம் மிகவும் வசதியானது.

அடுத்து ஒரு காப்பு நிலை அமைப்பில் $F_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x^i}$. எனவே இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$$ என மாறுகின்றன.

அதாவது $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial x^i} = 0 \qquad \ldots\ldots(133.6)$$

அடுத்து $$L = T - V \qquad \ldots\ldots(133.7)$$

ஆல் வரையறை செய்யப்படும் இலக்ராஞ்சின் சார்பை அறிமுகப் படுத்துகிறோம்.

மேலும், நிலை ஆற்றல் V என்பது x^i ன் தனிப்பட்ட சார்பு

எனவே $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{x}^i} = 0$.

எனவே 133.6 ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \qquad \ldots\ldots(133.8)$$

குறிப்பு: கணக்குகளில் இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தும்போது விசை வெக்டர் **F** ன் பண்புருக் கூறுகள் F^i க்களுக்கு பதிலாக இயற்பியல் கூறுகள் $\overline{F}^i$ களை எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

$\overline{F}^i = \sqrt{g_{ii}}\, F^i$ (கூட்டல் மரபு இல்லை) என்பது இருவகைக் கூறுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு ஆகும்.

134. நியூட்டனின் ஆற்றல் சமன்பாடு (Newton's equation of energy)

தேற்றம் : ஒரு காப்பு நிலை அமைப்பில்

$$T+V=h \text{ (ஒரு மாறிலி)}$$

இங்கு h ஆற்றல் மாறிலி (constant of energy) எனப்படும்.

நிருபணம் : $T=\frac{m}{2} g_{ij}\, v^i v^j$

எனவே
$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} g_{ij}\, v^i v^j\right)$$
$$= \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{m}{2} g_{ij}\, v^i v^j\right)$$
$$= mg_{ij}\, v^i \frac{\delta v^j}{\delta t}$$
$$= m g_{ij}\, v^i f^j$$
$$= m g_{ij} f^j\, v^i$$
$$= m f_i\, v^i$$
$$=-\frac{\partial V}{\partial x^i}\, \frac{dx^i}{dt}$$
$$=-\frac{dV}{dt}$$

இருபக்கமும் t ஐப் பொருத்துத் தொகை காண

$$T= h-V \text{ (} h \text{ ஒரு மாறிலி)}$$
$$\therefore\ T+V=h$$

இதுவே நியூட்டனின் ஆற்றல் சமன்பாடு.

135. மாதிரிக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : உருளை இலக்கெண்களில் துகளின் (i) திசை வேகம் (ii) முடுக்கம் இவற்றின் இயற்பியல் கூறுகளைக் காண்க.

(i) உருளை இலக்கெண்களில்

$$x^1=\rho\,,\ x^2=\phi\,,\ x^3=z$$

திசைவேகத்தின் முரண்மாறிக் கூறுகள்

$$\frac{dx^1}{dt}=\frac{d\rho}{dt},\ \frac{dx^2}{dt}=\frac{d\phi}{dt},\ \frac{dx^3}{dt}=\frac{dz}{dt}$$

எனவே திசைவேகத்தின் இயற்பியல் கூறுகள்

$$\sqrt{g_{11}}\ \frac{dx^1}{dt}=1.\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{dt}.$$

$$\sqrt{g_{22}}\ \frac{dx^2}{dt}=\rho\ \frac{d\phi}{dt}.$$

$$\sqrt{g_{33}}\ \frac{dx^3}{dt}=1\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dt}.$$

(ii) முடுக்கத்தின் முரண்மாறிக் கூறுகள் ஆவன

$$f^1=\frac{d^2x_1}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}\frac{dx^2}{dt}\ \frac{dx^2}{dt}=\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$$f^2=\frac{d^2x^2}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}\frac{dx^1}{dt}\ \frac{dx^2}{dt}+\left\{\begin{matrix}2\\21\end{matrix}\right\}\frac{dx^2}{dt}\ \frac{dx^1}{dt}$$

$$=\frac{d^2\phi}{dt^2}+\frac{2}{\rho}\ \frac{d\rho}{dt}\ \frac{d\phi}{dt}$$

$$f^3=\frac{d^2x^3}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

எனவே முடுக்கத்தின் இயற்பியல் கூறுகள் ஆவன

$$\sqrt{g_{11}}\ f^1=\ddot{\rho}-\rho\ \dot{\phi}^2$$

$$\sqrt{g_{22}}\ f^2=\rho\ddot{\phi}+2\ \dot{\rho}\ \ \dot{\phi}$$

$$\sqrt{g_{33}}\ f^3=\ddot{z}$$

குறிப்பு: மேலே கண்ட கணக்கில் முடுக்க வெக்டரின் கூறுகளைக் கண்டுபிடிக்க நேரடி முறையைப் பயன்படுத்தினோம். அவற்றையே இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தியும் கண்டுபிடிக்கலாம். இந்த முறையை வேறொரு கணக்கின் மூலம் கீழே விளக்குவோம்.

கணக்கு 2 : கோளதுருவ இலக்கெண் அமைப்பில் முடுக்க வெக்டரின் உடன்மாறிக் கூறுகளைக் கணக்கிடுக.

இங்கு $r=x^1$. $\theta=x^2$, $\phi=x^3$.

$$(ds)^2=(dx^1)^2+(x^1\ dx^2)^2+(x^1\ \sin x^2\ dx^3)^2$$

எனவே இயக்க ஆற்றல்

$$T=\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dr}\right)^2=\frac{m}{2}\quad[(\dot{x}^1)^2+(x^1\dot{x}^2)^2+(x^1\sin x^2\dot{x}^3)^2]$$

இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகள்படி

$$mf_1=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^1}=m\quad[\dot{x}^1-x^1(\dot{x}^2)^2-x^1(\sin x^2\dot{x}^3)^2]$$

$$mf_2=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^2}$$

$$=m\left[\frac{d}{dt}\{(x^1)^2\dot{x}^2\}-(x^1)^2\sin x^2\cos x^2(\dot{x}^3)^2\right]$$

$$mf_3=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^3}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^3}=m\left[\frac{d}{dt}\{(x^1\sin x^2)^2\dot{x}^3\}\right]$$

எனவே $f_1=\dot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\phi}^2$

$$_2=\frac{d}{dt}\{r^2\dot{\theta}^2\}-r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2$$

$$f_3=\frac{d}{dt}[r^2\sin^2\theta\dot{\phi}]$$

136. இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகளின் பயன்பாடுகள் (Applications of Lagrangean Equations)

வழவழப்பான (Smooth) வளைவுகளிலும் தளங்களிலும் துகள்களின் கடவு பாதைகளை நிர்ணயிப்பதில் இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகள் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என சில எடுத்துக் காட்டுகளால் விளக்குவோம்.

1. கட்டுப்பாடின்றி நகரும் துகள்

விசைகளின் செயலுக்கு துகள் கட்டுப்படாதிருந்தால் $F_i=0$ எனவே இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^i}=0 \qquad \ldots\ldots(136.1)$$

என்றாகின்றன.

அதாவது $m\,g_{il}\left[\ddot{x}^l+\begin{Bmatrix}l\\ jk\end{Bmatrix}\dot{x}^j\dot{x}^k\right]=0 \qquad \ldots\ldots(136.2)$

x^i களுக்குப் பதிலாக செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் y^i களை எடுத்துக் கொண்டால்

$$T = \frac{m}{2} \dot{y}^i \dot{y}^i$$

எனவே 136.2 $mg_{il} \ddot{y}^l = 0$ என்றாகிறது.

அதாவது $m\ddot{y}^i = 0$ (அதாவது) $\ddot{y}^i = 0$
எனவே தொகை காண, $y^i = a^i t + b^i$

இது ஒரு நேர்கோடு. இதுவே விசைகள் ஏதுமின்றி நகரும் துகளின் கடவு பாதை.

2. மாறிலி ஈர்ப்புக் களம் (Constant gravitational field)

ஒரு செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். y^3 அச்சு நிலைக்குத்தாக (vertical) இருக்கட்டும். மாறிலி ஈர்ப்புக்களத்தின் நிலை ஆற்றல் V எனில்

$$V = mgy^3$$

[y^3 அச்சின் மிகைத்திசை மேல்நோக்கியது என்க]

இப்பொழுது இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகளின்படி

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = mg_{il}\left[\ddot{x}^l + \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} \dot{x}^j \dot{x}^k\right] = F_i$$

தெக்காட்டின் அமைப்பில் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன.

எனவே மேற்கண்ட சமன்பாடுகள்

$$\ddot{y}^1 = 0, \; \ddot{y}^2 = 0, \; \ddot{y}^3 = -g \qquad [g \text{ ஒரு மாறிலி}]$$

என்றாகின்றன.

இவற்றின் தொகை காண

$$y^\alpha = a^\alpha t + b^\alpha; \; (\alpha = 1, 2)$$
$$y^3 = -\tfrac{1}{2} gt^2 + at + b.$$

எனவே துகளின் கடவு பாதை, y^3 அச்சிற்கு இணையாகவுள்ள சமச்சீரச்சு உடைய ஒரு பரவளையம் ஆகும்.

3. ஒரு வளைவின்மேல் துகளின் இயக்கம்

$x^i = x^i(s)$ என்னும் சமன்பாடுகளை உடைய வளைவு C ன் மேலேயே இருக்குமாறு ஒரு துகள் நகரட்டும். இங்கு s என்பது வில்தூரம்.

C என்பது தொடர்ந்து தடங்கலின்றி திரும்பும் தொடு கோடுடைய வளைவு என்று கொள்வோம்.

இனி v^i என்பன திசைவேகத்தின் முரண்மாறிக் கூறுகள் எனில்

$$v^i = vT^i \qquad \ldots\ldots(136.3)$$

இங்கு T^i அலகு தொடுகோட்டு வெக்டர்.

மேலும் f^i என்னும் முடுக்க வெக்டரின் கூறுகள் v^i ன் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுவாகும்,

$$\text{எனவே} \quad f^i = \frac{dv}{dt}T^i + v\frac{\delta T^i}{\delta t} \qquad \ldots\ldots(136.4)$$

$$= \frac{dv}{dt}T^i + v\frac{\delta T^i}{\delta s}\frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}T^i + v^2(kN^i) \qquad \text{[ஃப்ரெனெ சூத்திரம்]}$$

$$\text{எனவே} \quad f^i = \frac{dv}{dt}T^i + v^2kN^i \qquad \ldots\ldots(136.5)$$

எனவே முடுக்க வெக்டர், தொடுகோட்டு வெக்டர், முதன்மைச் செங்குத்து வெக்டர் மூன்றும் ஒரே தளத்தில் அமைந்துள்ளன. அதாவது முடுக்க வெக்டர் கொஞ்சு தளத்தில் அமைந்துள்ளது.

$\dot{v}$, kv^2 என்பன T^i, N^i திசைகளில் முடுக்க வெக்டரின் கூறுகள்.

ρ என்பது வளைவின் கோட்ட ஆரம் எனில் $K = \dfrac{1}{\rho}$. எனவே செங்குத்துக் கூறு $\dfrac{v^2}{\rho}$ என்றாகிறது.

அடுத்து R^i என்பது துகளின் மேல் வளைவின் எதிர்வினை (Reaction) என்க. Q^i என்பது மற்ற எல்லா புறவிசைகளின் விளைவு (Resultant) என்க.

எனவே $\mathbf{F}^i = Q^i + R^i$

அதாவது $mf^i = Q^i + R^i$

எனவே துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளை

$$Q^i + R^i = m\frac{dv}{dt}T^i + m\,v^2k\,N^i \qquad \ldots\ldots(136.6)$$

என எழுதலாம்.

மேலும் $\dfrac{dv}{dt}=v\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}(v^2),\ T=\dfrac{1}{2}m\,v^2$

என்பவற்றை நோக்க,

136.6 ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$Q^i+R^i=\frac{dT}{ds}\,T^i+2\,T\,k\,N^i \qquad \text{......(136.7)}$$

வளைவு C வழவழப்பானதாயிருந்தால் எதிர்வினை **R**, C க்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

அதாவது $\qquad R^i\,T_i=0.$

R=0 எனில் C யை துகளின் இயல்பான கடவு பாதை **(natural trajectory)** என்கிறோம்.

அடுத்து, 136.7 ல் இருந்து மூன்று முதன்மைத் திசைகளில் பிரித்தலின் (Resolving) மூலம் பின்வரும் சமன்பாடுகளை அமைக்கலாம். பிரிப்பதற்கு முறையே T_i, N, B_i இவற்றால் அகப்பெருக்கல் செய்கிறோம்.

அவ்வாறு செய்ய

$$Q^iT_i+R^iT_i=\frac{dT}{ds} \qquad \text{......(136.8)}$$

$$Q^iN_i+R^iN_i=2kT \qquad \text{......(136.9)}$$

$$Q^iB_i+R^iB_i=0 \qquad \text{......(136.10)}$$

எனக் கிடைக்கின்றன.

குறிப்பு 1 : $Q^i+R^i=F^i$ எனில், 136.8 ல் இருந்து,

$$T=\int F^iT^i\,ds$$

$$=\int F^i\frac{dx^i}{ds}\,ds$$

$$=-\int\frac{dv}{ds}\,ds \qquad \text{[காப்பு நிலை அமைப்பு எனில்]}$$

$$=-V+h \qquad \text{[h என்பது மாறிலி]}$$

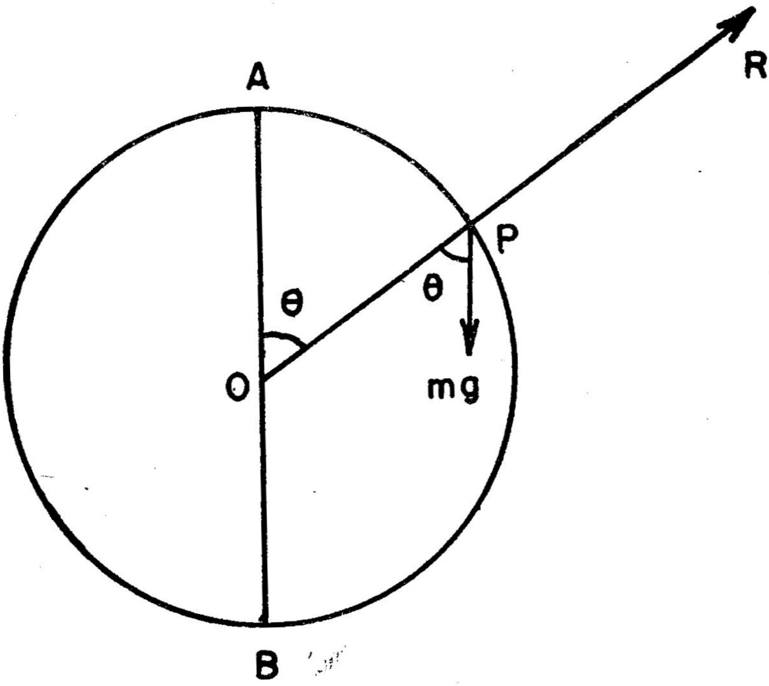
$\therefore\ T+V=h.$

இது ஆற்றல் சமன்பாடு ஆகும்.

குறிப்பு 2: வளேவே துகளின் இயல்பான கடவு பாதை எனில் $R^i = 0$. எனவே $Q^i = \frac{dT}{ds} \; T^i + 2TkN^i$. இந்நிலேயில் விசை வெக்டர் வளேவின் கொஞ்சு தளத்தில் அமைந்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு: ஒரு வழவழப்பான நிலேகுத்து வட்டத்தின் புறத்தே சறுக்கும் ஒரு துகளின் இயக்கத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

0 என்பது வட்ட மையமாகவும் a என்பது அதன் ஆரமாகவும் இருக்கட்டும்.



A என்பது வட்டத்தின் உச்சியாக இருக்கட்டும். 'm' பொருண்மை யுடைய துகள் வட்டத்தின் புறத்தே சறுக்குகிறது. A ல் அது புறப்படும் போது அதன் திசைவேகம் பூச்சியம் என்க. "t" நேரத்தில் அது P-ல் உள்ளது. அப்போது அதன் திசைவேகம் v என்க. $\angle AOP = \theta$ என்க. P ல் வட்டத்தின் எதிர்வினே **R** என்க.

இங்கு $\mathbf{F}=m\,\mathbf{g}+\mathbf{R}$

முதன்மைத் திசைகளில் கூறுகளை எழுத,

$$F \text{ தொடுகோடு} = mg \sin\theta$$

$$F \text{ செங்குத்து} = R - mg\cos\theta$$

ஆனால் $$F^i = m\frac{dv}{dt}T^i + mu^2 K N^i$$

எனவே $$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta \qquad \text{......(136.11)}$$

$$m\,v^2 k = R - mg\cos\theta \qquad \text{......(136.12)}$$

136.11 லிருந்து $$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

அதாவது $$v\frac{dv}{ds} = g\sin\theta$$

ஆனல் $$s = a\theta.$$

எனவே $$vdv = ag\sin\theta\, d\theta$$

இரு பக்கங்களிலும் தொகை காண,

$$\frac{v^2}{2} = ag\,[-\cos\theta] + C$$

$\theta=0$ ஆகும் போது $v=0$, எனவே $C=ag$

$$\therefore\ v^2 = 2\,ag(1-\cos\theta) \qquad \text{......(136.13)}$$

136.12 லிருந்து

$$R = \frac{mv^2}{p} + mg\cos\theta$$

$$= \frac{mv^2}{a} + mg\cos\theta$$

136.13 ஐப் பயன்படுத்த

$$R = mg\,(3\cos\theta - 2)$$

$R=0$ ஆகும்போது துகள் வட்டத்தை விட்டகலும். அதாவது $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ஆகும்போது அது அகலும்.

வரையறை : $F^i=Q^i+R^i$ என்க. R^i என்பது வளேவின் எதிர்வினே. வளேவின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் Q^i வளேவிற்குத் தொடு கோட்டுத்திசையில் அமைந்திருந்தால் துகளின் கடவு பாதையாகிய அவ்வளேவை விசை வளேவு (line of force) என்கிருேம்.

முடிவு : ஒரு துகளின் கடவு பாதை விசை வளேவானுல், அதன் செங்குத்து எதிர்வினே, வளேவின் முதன்மைச் செங்குத்து திசையில் இருக்கும். அதன் அளவு $2(h-V)K$ ஆகும்.

136.9 ல் இருந்து

$$Q^i N_i+R^i N_i= 2\,TK$$

ஆனுல் கடவு பாதை விசை வளேவாக இருப்பதால்

$Q^i \parallel T^i$. அதாவது $Q^i N_i=0$

எனவே $R^i N_i= 2\,TK$

ஆக, R^i என்னும் எதிர்வினே N^i ன் திசையில் அமைந்துள்ளது. அதன் அளவு$=2TK=2K(h-V)$.

137. தளத்தின் மேல் துகளின் இயக்கம்

அடுத்து, ஒரு வழவழப்பான தளத்தின் மேல் ஒரு துகளின் இயக்கத்தைப் பற்றிக் காண்போமாக.

$x^i=x^i(u^\alpha)$ என்பன தளத்தின் சமன்பாடுகள் என்க. இங்கு (u^1, u^2) என்பன தளத்தின் மேல் வளே கோட்டிய இலக்கெண்கள்.

இனி $v^i=\dfrac{dx^i}{dt}=\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\dfrac{du^\alpha}{dt}$

$$=x^i_\alpha\ \dot{u}^\alpha$$

$\dot{u}^\alpha$ ஐ v^α என எழுதினுல்

$$v^i=x^i_\alpha\ v^\alpha \qquad \ldots\ldots(137.1)$$

v^α ஐ தளத் திசைவேக வெக்டர் என்கிருேம். v^i வெளித் திசைவேக வெக்டர் ஆகும்.

137.1 ஐ உள்ளார்ந்த வகையிட

$$f^i=\frac{\delta v^i}{\delta t}=x^i_\alpha\ \frac{\delta v^\alpha}{\delta t}+x^i_{\alpha;\beta}\,v^\alpha\,v^\beta \qquad \ldots\ldots(137.2)$$

$\dfrac{\delta v^\alpha}{\delta t}=f^\alpha$ என இட்டு, அதை தளமுடுக்க வெக்டர் என்கிருேம்.

மேலும் காசின் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்த (118.8)

$$f^i = x^i_\alpha f^\alpha + b_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \xi^i \qquad \ldots\ldots(137.3)$$

R^i என்பதைத் தளத்தின் செங்குத்து எதிர் வினையாகவும், Q^i என்பதைத் துகளின்மேல் செயல்படும் புறவிசை வெக்டர் எனவும் கொண்டால், துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்,

$$Q^i + R^i = mf^i$$

$$= mx^i_\alpha f^\alpha + mb_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \xi^i$$

$$= mx^i_\alpha f^\alpha + mv^2 b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \xi^i \qquad \ldots\ldots(137.4)$$

ஆனால் $b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta = k_{(n)}$

எனவே $Q^i + R^i = mx^i_\alpha f^\alpha + mv^2 k_{(n)} \xi^i \qquad \ldots\ldots(137.5)$

ξ^i ஆல் அகப் பெருக்கல் செய்ய

$$Q^i \xi^i + R^i \xi_i = 0 + mv^2 k_{(n)} \qquad \ldots\ldots(137.6)$$

[$\because x^i_\alpha$ க்கு ξ_i செங்குத்தானது]

அதாவது $Q^i\xi_i + R^i\xi_i = 2Tk_{(n)} \qquad \ldots\ldots(137.7)$

எடுத்துக்கொண்ட தளத்தின் தொடுகோட்டுச் சமதளத்தில் இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுத 137.5 $g_{ij} x^j_r$ ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

பெருக்கினால்,

$$g_{ij} x^i_r Q^i + 0 = mg_{ij} x^j_r x^i_\alpha f^\alpha + 0 \qquad \ldots\ldots(137.8)$$

$g_{ij} x^i_r x^i_\alpha = a_{r\alpha}$ ஆதலின்

$$g_{ij} x^i_r Q^i = ma f^\alpha \qquad \ldots\ldots(137.9)$$

அதாவது $x^i_r Q_i = mf_r \qquad \ldots\ldots(137.10)$

$x^i_r Q_i = Q_r$ என்று பிரதியிட

$$Q_r = mf_r \qquad \ldots\ldots(137.11)$$

என்றாகிறது.

இவை தளத்தில் நியூட்டனின் இயக்கச் சமன்பாடுகள். இவற்றிற்கு இணையான இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடுகளும் தளத்தில் உண்டு.

துகள் தளத்தில் δu^α என்னும் சிறிய இடப் பெயர்ச்சியை அடையட்டும். இதனுல் செய்யப்படும் வேலை dw பின்வரும் சமன் பாட்டால் தரப்படும்

$$dw = Q_i \, dx^i = Q_i \, x^i_\alpha \; du^\alpha$$

$$= Q_\alpha \; du^\alpha$$

விசை அமைப்பு காப்புநிலை அமைப்பாயின்

$$Q_\alpha = - \frac{\partial v}{\partial u^\alpha}$$

மேலும் துகளின் இயக்க ஆற்றல் T,

$$T = \tfrac{1}{2} \, m a_{\alpha\beta} \, v^\alpha \, v^\beta = \tfrac{1}{2} \, m a_{\alpha\beta} \, \dot{u}^\alpha \, \dot{u}^\beta$$

இதிலிருந்து முன்போலவே

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} = m a_{\alpha\beta} \; f^\beta$$ என நிரூபிக்கலாம்.

எனவே $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} = m f_\alpha = Q_\alpha = - \frac{\partial v}{\partial u^\alpha}$$

$L \equiv T - V$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0$$ என எழுதலாம்.

முடிவு **1**: ஒரு தளத்தின் மேல் நகரும் துகளின் கடவுபாதையின் குறுக்கடிக்கோட்டம் σ ஆகவும் செங்குத்து வெக்டர் n^α ஆகவும் இருப்பின்

$$f^\alpha = \tfrac{1}{2} \; \frac{dv^2}{ds} \; t^\alpha + \sigma v^2 n^\alpha$$

நிருபணம்: $v^\alpha = v \, t^\alpha$

't' ஐப் பொருத்து உள்ளார்ந்த வகையிட

$$f^\alpha = \frac{\delta v^\alpha}{\delta t} = \frac{dv}{dt} \; t^\alpha + v^2 \, \frac{\delta t^\alpha}{\delta s}$$

ஆனுல் $$\frac{\delta t^{\alpha}}{\delta s}=\sigma\ n^{\alpha}\ ,\quad \frac{dv}{dt}=v\ \frac{dv}{ds}$$

எனவே $$f^{\alpha}=v\ \frac{dv}{ds}\ t^{\alpha}+\sigma v^{2}n^{\alpha}$$

$$=\tfrac{1}{2}\ \frac{d(v^{2})}{ds}\ t^{\alpha}+\sigma\ v^{2}n^{\alpha}$$

குறிப்பு : மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து

$$m\ f^{\alpha}=m\cdot\tfrac{1}{2}\ \frac{d}{ds}(v^{2})\ t^{\alpha}+m\ \sigma\ v^{2}n^{\alpha}$$

$$=\ \frac{d}{ds}\ (\tfrac{1}{2}\ mv^{2})\ t^{\alpha}+\sigma\ (mv^{2})\ n^{\alpha}$$

எனவே $$F^{\alpha}=\ \frac{dT}{ds}\ t^{\alpha}+2\ \sigma\ T\ n^{\alpha}$$

மேலும் விசை அமைப்பு இல்லாவிடில் $F^{\alpha}=0$ (இது ஒரு சிறப்பு நிலை)

அதாவது $$\frac{dT}{ds}\ t^{\alpha}+2\ \sigma\ T\ n^{\alpha}=0$$

அதாவது $$\frac{dT}{ds}=0\ ,\ \sigma\ T=0$$

எனவே $\sigma=0$. அதாவது துகள் தளத்தில் ஒரு குறுக்கடி வழியே செல்கிறது.

விசை அமைப்பு F^{α} தளத்தில் கடவு பாதைக்குச் செங்குத்தாகவும், மாருத அளவுடனும் அமைந்திருப்பது மற்ருெரு சிறப்பு நிலையாம்.

அதாவது $F^{\alpha}=Cn^{\alpha}$ [இங்கு C ஒரு மாறிலி]

20

எனவே
$$Cn^{\alpha} = \frac{dT}{ds} t^{\alpha} + 2\sigma T n^{\alpha}$$
$$= mv \frac{dv}{ds} t^{\alpha} + m\sigma v^{2} n^{\alpha}$$
$$\therefore mv \frac{dv}{ds} = 0, m\sigma v^{2} = C.$$

இதில் முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து துகளின் வேகம் மாறிலி எனக் கிடைக்கின்றது. இரண்டாவதில் இருந்து σ ஒரு மாறிலி எனத் தெரிகிறது. அதாவது தளத்தில் துகளின் கடவு பாதை ஒரு குறுக்கடி வட்டம் (geodesic circle) ஆகும். [σ ஒரு மாறிலியானால் வளைவைக் குறுக்கடி வட்டம் என்கிறோம். எடுத்துக்கொண்ட தளம், கோள தளம் எனில் குறுக்கடி வட்டம், ஒரு சாதாரண வட்டம் ஆகும். ஆனால் பெருவட்டமாக இருப்பது அவசியமன்று. எடுத்துக்கொண்ட தளம் கோள தளமாக இல்லாவிடில் குறுக்கடி வட்டம் அடைத்த வளைவாகக் கூட (closed curve) இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. மேலும் அது ஒரு நிலைத்த புள்ளியி லிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள புள்ளியின் இயங்கு வரையாகவும் இருப்பது அவசியமன்று.]

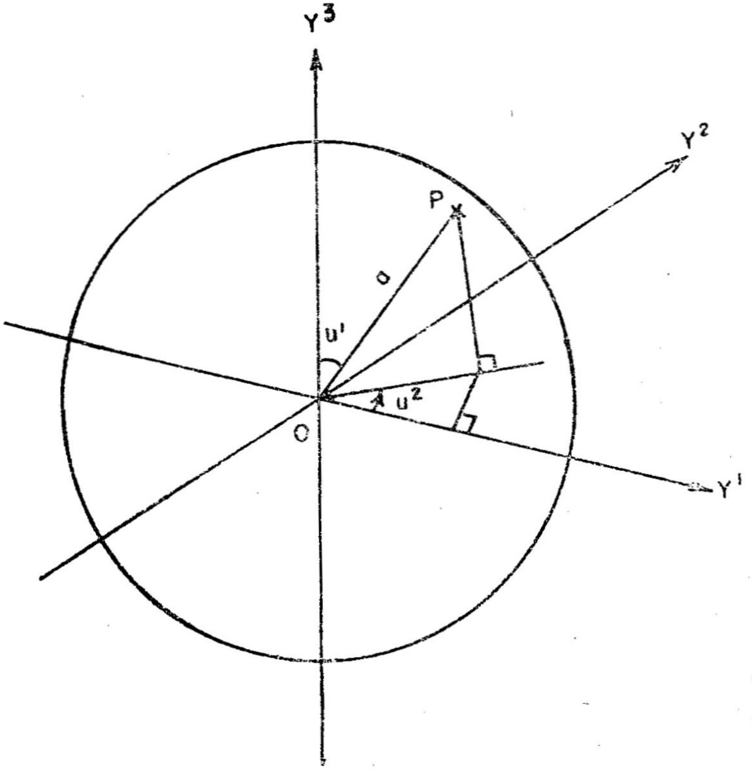
துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் பண்புருச் சூத்திரங்களாக அமைத்தால் வெளியினில் நகரும் துகளுக்கும், தளத்தில் நகரும் துகளுக்கும் இயக்க விசையியல் சமன்பாடுகளில் ஒரு குறிப்பிடத் தக்க ஒற்றுமை காணப்படுகிறது. இதற்குத் தளம் தட்டையாக இருக்க வேண்டிய அவசியம்கூட இல்லை. மூன்றுக்கு மேற்பட்ட பரிமாணம் உள்ள வெளியினிலோ அல்லது தளத்திலோ இயக்கச் சமன்பாடுகளை அமைக்க இந்த ஒற்றுமை உதவுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : ஒரு வழவழப்பான கோள தளத்தின் மேல் புவியீர்ப்பின் கீழ், ஒரு துகள் F_{α} என்னும் விசைக் களத்திற்குக் கட்டுப்பட்டு நகருகிறது. வெளியின் தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் y^{i}-ம், தளத்தின் இலக்கெண்கள் u^{α}-ம் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளால் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

$$\left.\begin{aligned} y^{1} &= a \sin u^{1} \cos u^{2} \\ y^{2} &= a \sin u^{1} \sin u^{2} \\ y^{3} &= a \cos u^{1} \end{aligned}\right\} \text{a என்பது கோளத்தின் ஆரம்.}$$

துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

F^{α} என்னும் விசைக்களம் துகளை $u' = C$ என்னும் வட்டத்தில் இயங்குமாறு செய்தால் அதன் சுழல் வேகம் ஒரு மாறிலி என நிரூபி.



துகள் நேரம் 't' ஆகும்போது கோளத்தின் மேல் P என்னும் புள்ளியில் இருக்கட்டும்.

P-ன் தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள் y^i. அதன் தள இலக்கெண்கள் u^{α}. எனவே

$$y^1 = a \sin u^1 \cos u^2$$

$$y^2 = a \sin u^1 \sin u^2$$

$$y^3 = a \cos u^1$$

அடுத்து, $$T = \tfrac{1}{2}\, m \dot{y}^i \; \dot{y}^i$$

$$= \tfrac{1}{2} m.a^2 \;\; [(\dot{u}')^2 + (\dot{u}^2)^2 \sin^2 u']$$

எனவே $$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1} = ma^2 \dot{u}^1 ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^1}\right) = ma^2 \ddot{u}^1$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^1} = ma^2 (\dot{u}^2)^2 \sin u^1 \cos u^1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^2} = ma^2 \dot{u}^2 \sin^2 u^1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^2}\right) = ma^2 [\dot{u}^2 \; 2\sin u^1 \cos u^1 \; \dot{u}^1 + \sin^2 u^1 \; \ddot{u}^2]$$

$$\frac{\partial T}{\partial u^2} = 0$$

எனவே, துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}^\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial u^\alpha} = F_\alpha$$

அதாவது $ma^2[\ddot{u}^1 - (\dot{u}^2)^2 \sin u^1 \cos u^1] = F_1$

$$ma^2[\ddot{u}^2 \sin^2 u^1 + 2\dot{u}^1 \dot{u}^2 \sin u^1 \cos u^1] = F_2$$

இவை கோளதளத்தின் மேல் துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்.

அடுத்து F^α எனும் விசைக்களம் $u^1 = c$ என்னும் வட்டத்திலேயே துகளை இயங்குமாறு செய்தால்,

துகளின் நிலை ஆற்றல் $V = mgy^3$

$$V = mag \cos u^1$$

எனவே $$\frac{\partial v}{\partial u^1} = mag \sin u^1$$

$$\frac{\partial v}{\partial u^2} = 0$$

மேலும் $$F_\alpha = -\frac{\partial v}{du^\alpha}$$

எனவே $$F_1 = mag \sin u^1, \; F_2 = 0.$$

ஆக இரண்டாவது இயக்கச் சமன்பாடு

$\ddot{u}^2 \sin^2 u^1 = 0$ என்றாகிறது $[\because \dot{u}^1 = 0]$

ஆனால் $$u^1 = c \quad \therefore \ddot{u}^2 = 0$$

தொகை காண $\dot{u}^2 = c^1$ (ஒரு மாறிலி). அதாவது துகளின் சுழல் வேகம் (angular velocity) ஒரு மாறிலி ஆகும்.

பயிற்சி

1. இலக்ராஞ்சின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, உருளை இலக்கெண் அமைப்பில் முடுக்க வெக்டரின் உடன்மாறி இயற்பியல் கூறுகளைக் கணக்கிடுக.

2. கோளதுருவ அமைப்பில் முடுக்க வெக்டரின் இயற்பியல் கூறுகளை நேரடி முறையில் கணக்கிடுக.

3. ஒரு துகளின் திசைவேக வெக்டரை $\frac{1}{m} g^{pq} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^q}$ என்று எழுதலாம் எனக் காட்டு.

4. ϕ என்பது x^i, $\dot{x}^i$ இவற்றின் மாற்றமிலி சார்பு எனில் $\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^i}$ ஓர் உடன் மாறி வெக்டர் என நிரூபி.

5. ϕ என்பது x^i, $\dot{x}^i$ இவற்றின் ஒரு மாற்றமிலி சார்பு எனில் $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ ஓர் உடன்மாறி வெக்டர் என நிரூபி.

6. ஒரு துகளின் இயல்பான கடவுபாதைக்கு ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் விசை வெக்டர் தொடுகோடாய் அமைந்திருப்பின் துகளின் பாதை ஒரு நேர்கோடு என நிரூபி.

7. ஒரு துகளின் இயல்பான கடவு பாதையில் விசை வெக்டரின் அளவு $\sqrt{\left(\frac{dT}{ds}\right)^2 + 4T^2K^2}$ என நிரூபி.

8. V என்பது ஒரு துகளின் நிலை ஆற்றல் சார்பு எனில், துகளின் இயல்பான கடவு பாதைக்கு $K = \frac{\partial}{\partial x^i} (\log \sqrt{h-V})\, N^i$ என்று நிரூபி.

9. ஒரு தனி ஊசலின் (Simple pendulum) இயக்கச் சமன் பாடுகளை எழுதவும். அதன் நீளம் l என்றால் சிறு அலைவுகளுக்கு அதன் கால வட்டம் (period) $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ என நிரூபி.

10. $y^1 = a \cos \theta$, $y^2 = a \sin \theta$, $y^3 = k\theta$ என்ற சமன்பாடுகளை உடைய ஒரு வழவழப்பான திருகு சுழலின் வழியே, புவியீர்ப்பின் கீழ் ஒரு துகள் நகர்ந்தால் அதன் இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதவும்.

13. தெக்காட்டின் பண்புருக்கள்
(Cartesian tensors)

138. நாம் இதுவரை கற்ற பண்புருக்கள் யாவும் பொதுப் பண் புருக்கள் (General Tensors) எனப்படும். அவை இலக்கெண் அமைப்புகள் அனைத்திலும் பண்புருத் தன்மை பொருந்தியவை. அத்தகைய பண்புருக்களுக்கு முரண்மாறி, உடன்மாறித் தன்மைகள் அடிப்படைத் தன்மைகள் ஆகும். எனவே, அத் தன்மைகளை வேறுபடுத்திக் காட்ட மேற்குறி, கீழ்க்குறிச் சுட்டிணைப்புகளைப் பயன்படுத்தினோம். புள்ளியின் இலக்கெண் களையும் மேற்குறி மரபின் மூலம் எழுதிவந்தோம். ஆனால், பண் புருப் பயன்பாட்டுக் கணிதத்தில் சில சமயங்களில் எளிமை கருதி அடிப்படை இலக்கெண் அமைப்பையும் அதன் நிலைமாற்றங் களையும் செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்புகளாக எடுத்துக் கொள்கிறோம். இவ்வமைப்புகளில் பண்புருத் தன்மை உள்ள உருப்படிகளைத் தெக்காட்டின் பண்புருக்கள் (Cartesian tensors) என்கிறோம்.

பொதுப் பண்புருக்கள் எந்தவொரு இலக்கெண் அமைப்பிலும் பண்புருத் தன்மை பொருந்தியன ஆதலின் செவ்வகத் தெக் காட்டின் அமைப்புகளிலும் அவை பண்புருக்களே. எனவே, பொதுப் பண்புருக்கள் யாவும் தெக்காட்டின் பண்புருக்களே. ஆனால், இதன் மறுதலை உண்மை அன்று.

தெக்காட்டின் பண்புருக்கள் பற்றியும் அவற்றின் சிறப்புத் தன்மைகள் பற்றியும் இந்த அதிகாரத்தில் விரிவாகக் காண்போம்.

அடிப்படை இலக்கெண் அமைப்பும் அதன் நிலைமாற்றங்களும் செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்புகள் எனில் அமைப்புகள் அனைத்திலும் கிறித்தஃபல் குறியீடுகள் பூச்சியங்கள் ஆகின்றன.

அவ்வாறு இருப்பின் இலக்கெண் நிலைமாற்றம் $x^p = a^p_i \; \bar{x}^i + b^p$ ஆல் தரப்படுகின்றது என முன்னரே நூற்பிரிவு 59-ல் கண்டோம். இங்கு $a^p_i \; a^p_j = \delta^i_j$ ஆகும். மேலும் அத்தகைய நிலைமாற்றங்களுக்கு உடன்மாறி, முரண்மாறி வேறுபாடுகள் கிடையாது எனவும் முன்னரே நூற்பிரிவு 29-ல் கண்டோம். ஆகவே, தெக்காட்டின் பண்புருக்களை எழுதும்போது மேற்குறி, கீழ்க்குறி மரபுகள் தேவையில்லை. குறிகள் அனைத்தையும் கீழ்க்குறிகளாகவே எழுதுகிறோம். தெக்காட்டின் பண்புருக்களோடு க்ரோனகர் டெல்டா δ^i_j ஐ எழுதும்போது δ_{ij} என்றே எழுதுகிறோம். புள்ளியின் இலக்கெண்களை எழுதும்போதும் மேற்குறிப் பழக்கத்தை நீக்கி கீழ்க்குறியுடன் எழுதுகிறோம். எனவே இவ்வதிகாரத்தில் புள்ளியின் இலக்கெண்கள் x_i என்றே தரப்படும்.

குறிப்பு : தெக்காட்டின் பண்புரு அமைப்புகளுக்கு

1. $(ds)^2 = x_i \, x_i$
2. $g_{ij} = \delta_{ij}$ எனவே $g = 1$
3. $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$

139. முப்பரிமாண வெளியில் இலக்கெண் நிலைமாற்றம்

தெக்காட்டின் பண்புரு அமைப்புகளுக்கு முப்பரிமாண வெளியில் ஏற்படும் இலக்கெண் நிலைமாற்றம் பற்றிக் காண்போம்.

$O \, X_1 \, X_2 \, X_3$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கு அச்சுத் தொகுதி என்க. அது சுழல்வதன் மூலம் $O \, \bar{X}_1 \, \bar{X}_2 \, \bar{X}_3$ என்னும் நிலையை அடைகிறது என்க. l_{ij} என்பது $O X_i$, $O\bar{x}_j$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணத்தின் கொசைன் விகிதம் என்க. பொதுவாக $l_{ij} \neq l_{ji}$.

இவ்விரு அச்சு அமைப்புகளிலும் முறையே (x_1, x_2, x_3), $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ என்பன ஒரே புள்ளியின் இலக்கெண்கள் என்றால் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{31} \\ l_{13} & l_{23} & l_{\;\;1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots(139.1)$$

என்பதை முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதத்தில் கற்றோம். இங்கு $l_{ij} \, l_{ik} = \delta_{jk}$, $l_{ji} \, l_{ki} = \delta_{jk}$. 139.1 யும் சுருக்கமாக $\bar{x}_j = l_{ij} \, x_i$ என எழுதலாம். ......(139.2)

மேற்கண்ட நிலைமாற்றத்தில் நாம் ஆதியை மாற்றவில்லை. ஆதியையும் $OX_1X_2X_3$ யைப் பொறுத்து $O^1(p_j)$ என்னும் புள்ளிக்கு இடப்பெயர்ச்சி செய்து, அச்சுகளைச் சுழலவிட்டால் இலக்கெண் மாற்றம்

$$\bar{x}_j = l_{ij}\, x_i - p_j \qquad \ldots\ldots(139.3)$$

என்பதால் தரப்படும்.

சமன்பாடு 139.3, ஒரு செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பிலிருந்து மற்றொரு செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்பிற்கு மாறும் போது நிகழும் பொதுவான நிலைமாற்றத்தைத் தருகின்றது.

அடுத்து 139.3 ஐ l_{kj} ஆல் பெருக்கி, j-ன் மதிப்புகளை 1-லிருந்து 3 வரை கூட்ட

$$l_{kj}\,\bar{x}_j = l_{kj}\, l_{ij}\, x_i - l_{kj}\, p_j$$

$$l_{kj}\,\bar{x}_j = \delta_{ki}\, x_i - l_{kj}\, p_j$$

$$l_{kj}\,\bar{x}_j = x_k - l_{kj}\, p_j$$

எனவே
$$x_k = l_{kj}\,\bar{x}_j + l_{kj}\, p_j$$

அதாவது
$$x_i = l_{ij}\,\bar{x}_j + l_{ij}\, p_j \qquad \ldots\ldots(139.4)$$

139.3-ல் இருந்து $\dfrac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} = l_{ij}$

139.4-ல் இருந்து $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} = l_{ij}$

எனவே தெக்காட்டின் பண்புருக்களுக்கு உடன்மாறி, முரண்மாறி வேறுபாடுகள் கிடையாது.

140. தெக்காட்டின் பண்புருவின் மாற்றுரு விதி

ஒரு பொதுப் பண்புருவிற்கும், தெக்காட்டின் பண்புருவிற்கும் மாற்றுரு விதியில் ஓர் அடிப்படை வேறுபாடு உள்ளது. இதைக் கவனித்து உணரவேண்டும்.

A_i என்பது ஒரு பொதுப் பண்புரு எனில் அதன் மாற்றுரு விதியை

$$\bar{A}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\; A_i \qquad \ldots\ldots(140.1)$$

என எழுதுகிறோம். இங்கு x^i, $\bar{x}^j$ என்னும் குறிப்பிட்ட இரு இலக்கெண் அமைப்புகளுக்கிடையே உள்ள நிலைமாற்றத்தை

எடுத்துக்கொண்டு மாற்றுரு விதியை எழுதியுள்ளோம். இதில் $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}$-ன் கூறுகள் புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறுபடுவன. ஆனால், A_i என்பது ஒரு தெக்காட்டின் பண்புரு எனில் $\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}=l_{ij}$. எனவே, மாற்றுரு விதி

$$\bar{A}_j=l_{ij}\ A_i \text{ என்றாகிறது.} \qquad ......(140.2)$$

மேலும். $\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}=l_{ij}$ -ன் கூறுகள், இரு குறிப்பிட்ட இலக்கெண் அமைப்புகளுக்கிடையே உள்ள நிலைமாற்றத்தை எடுத்துக் கொண்டால், புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறுபடுவதில்லை. எனவே, தெக்காட்டின் பண்புருக்களுக்கு மாற்றுரு விதி எழுதும்போது பகுதி வகைக்கெழுக்களைப் பயன்படுத்தாது 140.2 குறிப்பிட்ட படியே எழுதுகிறோம்.

வரையறைகள்

1. முதல் அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புரு

$OX_1X_2X_3$, $O\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ என்பன இரு செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கு அச்சு அமைப்புகள் என்க. OX_i, $O^1\bar{X}_j$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணத்தின் கொசைன் விகிதம் l_{ij} என்க. ஓர் உருப்படி யின் கூறுகள் $OX_1X_2X_3$, $O^1\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ என்ற அமைப்புகளில் முறையே A_i, $\bar{A}_j$ என்க.

$$\bar{A}_j=l_{ij}\ A_i$$

என்னும் மாற்றுரு விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு அந்த உருப்படியின் கூறுகள் மாறினால் A_i ஐ ஒரு முதல் அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புரு அல்லது தெக்காட்டின் வெக்டர் என்கிறோம்.

2. இரண்டாம் அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புரு

ஓர் உருப்படியின் கூறுகள் $OX_1X_2X_3$, $O^1\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3$ என்ற அமைப்புகளில் முறையே A_{ij}, $\bar{A}_{pq}$ என்க. அவை

$$\bar{A}_{pq}=l_{ip}\ l_{jq}\ A_{ij}$$

என்னும் மாற்றுரு விதிக்குக் கட்டுப்பட்டு மாறினால் A_{ij} ஐ ஓர் இரண்டாம் அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புரு என்கிறோம்.

3. உயர் அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புரு

இரண்டாம் அடைவுப் பண்புருவின் வரையறையை நீட்டியே உயர் அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புருக்களுக்கு மாற்றுரு

விதியை எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக A_{ijkl} என்பது ஒரு நான்காம் அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புரு எனில், அதன் மாற்றுரு விதி

$$\bar{A}_{pqrs} = l_{ip}\, l_{jq}\, l_{kr}\, l_{ls}\, A_{ijkl} \text{ ஆகும்.}$$

4. பூச்சிய அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புரு

பூச்சிய அடைவுப் பண்புருவை அளவி என்கிறோம். அது இலக்கெண் நிலைமாற்றத்தில் மாற்றமிலி யாகும்.

முடிவு : சுழற்சியினால் ஏற்படும் இலக்கு அச்சுகளின் நிலை மாற்றத்தை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் புள்ளியின் அமைநிலை வெக்டர் x_i ஒரு தெக்காட்டின் வெக்டர் ஆகும்.

நிரூபணம் : சுழற்சியினால் ஏற்படும் நிலைமாற்றத்தை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் $\bar{x}_j = l_{ij}\, x_i$. எனவே x_i, ஒரு தெக்காட்டின் வெக்டர் நிறைவு செய்யவேண்டிய மாற்றுரு விதியை நிறைவு செய்கிறது.

எனவே, x_i ஒரு முதல் அடைவுத் தெக்காட்டின் பண்புரு ஆகும்.

ஆனால், x_i ஒரு பொதுப் பண்புரு அல்ல என்பதைக் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு : பொதுப் பண்புருக்களின் இயற்கணித விதிகள் யாவும் தெக்காட்டின் பண்புருக்களுக்கும் பொருந்தும்.

கிறித்தலைப் குறியீடுகள் பூச்சியங்களாவதால் தெக்காட்டின் பண்புருக்களின் உடன்மாறி வகைக்கெழுக்கள் சாதாரணப் பகுதி வகைக்கெழுக்களாகவும் உள்ளார்ந்த வகைக்கெழுக்கள் சாதாரண முழுமை வகைக்கெழுக்களாகவும் அமைகின்றன.

141. தெக்காட்டின் பண்புருக் குறுக்கம்

பொதுப் பண்புருக்களில் ஒரு மேற்குறியையும் ஒரு கீழ்க் குறியையும் சமமாக அமைப்பதால் உருவாக்கப்படும் குறுக்கம் மூலப் பண்புருவைவிட இரு தகுநிலைகள் குறைந்த பண்புரு என்பதை முன்னர் கண்டோம். மேலும் ஒரே நிலையில் உள்ள இரு சுட்டிணைப்புகளைச் சமமாக அமைத்தால் உருவாகும் குறுக்கம் பண்புருவாக அமைவதில்லை என்பதால் அவ்வாறான குறுக்கங்களை நாம் ஏற்கவில்லை. ஆனால், ஒரு தெக்காட்டின் பண்புருவில் சுட்டிணைப்புகள் அனைத்தும் கீழ்க்குறிகளே. எனவே, இங்கு

குறுக்கத்தை இரு கீழ்க்குறிகளைச் சமமாக அமைப்பதன் மூலம் உருவாக்குகிறோம். அவ்வாறு ஏற்படுத்தப்பட்ட குறுக்கமும் ஒரு தெக்காட்டின் பண்புரு என்று நிரூபிக்கலாம்.

முடிவு: ஒரு தெக்காட்டின் பண்புருவின் குறுக்கம், மூலப் பண்புருவை விட இரு தகுநிலைகள் குறைந்த பண்புருவாகும்.

நிரூபணம்: இதை ஒரு நான்காம் அடைவுப் பண்புருவை எடுத்துக்கொண்டு நிரூபிக்கிறோம். நிரூபணத்தின் பொதுத் தன்மை கருதி எல்லாப் பண்புருக்களும் பொருந்தும் என்று கொள்ளலாம்.

$\bar{A}_{pqrs}=l_{ip}\,l_{jq}\,l_{kr}\,l_{ns}\,A_{ijkn}$ என்க.

$q=s$ என்று இட

$$\bar{A}_{psrs}=l_{ip}\,l_{js}\,l_{kr}\,l_{ns}\,A_{ijkn}$$
$$=l_{ip}\,l_{kr}\,(l_{js}\,l_{ns})\,A_{ijkn}$$
$$=l_{ip}\,l_{kr}\,\delta_{jn}\,A_{ijkn}$$
$$\bar{A}_{psrs}=l_{ip}\,l_{kr}\,A_{inkn}$$

எனவே, A_{ijkn}-ன் குறுக்கம் A_{inkn} ஓர் இரண்டாம் அடைவு தெக்காட்டின் பண்புரு.

142. தெக்காட்டுப் பண்புருக்களின் சிறப்புத் தன்மைகளை இதுவரை கண்டோம். பண்புருப் பயன்பாட்டுக் கணிதத்தில் முடிவுகளை எளிதில் பெறுவதற்காகத் தெக்காட்டின் பண்புருக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். இதற்காக செவ்வகத் தெக்காட்டின் இலக்கெண்களையே எடுத்துக்கொள்கிறோம். ஆயினும், சில சமயங்களில் தெக்காட்டின் இலக்கெண்களிலிருந்து கோளதுருவ இலக்கெண்கள் போன்ற வளைகோட்டிய இலக்கெண்களுக்கு மாற்ற நேரிடலாம். அச்சமயங்களில், உடனே புள்ளியின் இலக்கெண்களை மேற்குறிகள் மூலம் குறிப்பிட்டு, உடன்மாறி, முரண்மாறி வேறுபாடுகளையும் ஏற்படுத்திக்கொள்ள வேண்டும்.

தெக்காட்டின் பண்புருக்கள் பயன்பாட்டுக் கணிதத்தில் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதை விளக்க, அடுத்த அதிகாரத்தில் கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தின் இயக்க விசையியல் (Dynamics of a rigid body) முடிவுகளை, முற்றிலும் தெக்காட்டின் பண்புருக்களைப் பயன்படுத்தியே எழுதியுள்ளோம்.

14. கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தின் இயக்க விசையியல்

(Dynamics of a Rigid Body)

இந்த அதிகாரத்தில், ஒரு முப்பரிமாண வெளியில், ஒரு கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தின் இயக்கவிசையியல் முடிவுகளைப் பெறுதற்குப் பண்புரு கணிதம் எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்று காண்போம். முடிவுகளை அடைதற்குக் கணக்கிடுதலில் உள்ள இடர்ப்பாடுகளைக் குறைப்பதற்காக இலக்கெண் அமைப்புகளைச் செவ்வகத் தெக்காட்டின் அமைப்புகளாக ஏற்கிறோம். அதாவது, இதில் வரும் பண்புருக்கள் யாவையும் தெக்காட்டின் பண்புருக்களாகவே கொள்கிறோம்.

143. கட்டிறுக்கப் பிண்டம் (Rigid body)

வரையறை: ஒரு பிண்டத்தைப் (body) பல துகள்களின் சேர்க்கையாக நாம் கருதுகிறோம். அப் பிண்டம் இயங்கும்போது அதன் துகள்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் மாறாதிருந்தால் அதனைக் **கட்டிறுக்கப் பிண்டம்** என்கிறோம்.

ஒரு பிண்டம் கட்டிறுக்கமாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு

$P^{(1)}$, $P^{(2)}$ என்பன ஒரு பிண்டத்தின் இரு துகள்களாக இருக்கட்டும். நேரம் t ஆகும்போது எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட இலக்கெண் அமைப்பில் $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ என்பனவற்றின் அமைநிலைகள் முறையே $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$ என்க.

அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம்

$$[P^{(1)} P^{(2)}]^2 = \left(x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right) \left(x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right)$$

அடுத்த Δt நேரத்தில் பிண்டம் மிகச் சிறிய இடமாற்றத்தை அடையட்டும். இதனுல் x_i என்னும் இடத்தில் உள்ள துகள் $x_i+\Delta x_i$ எனும் இடத்தை அடையட்டும்.

பிண்டம் கட்டிறுக்கமாக இருப்பதால் தூரம் $P^{(1)} P^{(2)}$ மாருதது. எனவே $d[P^{(1)} P^{(2)}]^2=0$

$$\therefore \left(x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right) \left(dx_i^{(1)} - dx_i^{(2)}\right)=0$$

இதுவே பிண்டம் கட்டிறுக்கமாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு.

144. சில வரையறைகள்

வரையறை 1 : பிண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of a body)

ஒரு பிண்டம் N துகள்களினுல் அமைக்கப்பட்டது என்க. ஒரு குறிப்பிட்ட துகளின் பொருண்மை $m^{(\alpha)}$ என்க. அத் துகளின் இலக்கெண்கள் $x_i^{(\alpha)}$ எனில், பிண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் ξ_i ஐப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் வரையறை செய்யப்படுகின்றது.

$$\xi_i = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N} m^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)}}{\sum_{\alpha=1}^{N} m^{(\alpha)}}$$

இதில் (α) ஐ நீக்கி

$$\xi_i = \frac{\Sigma m x_i}{\Sigma m} \qquad \text{......(144.1)}$$

என்றும் எழுதலாம்.

பிண்டமானது இடைவெளியின்றித் தொடர்ந்த துகள்களின் பரத்தலால் அமைந்திருப்பின் ξ_i-ன் சூத்திரத்தில் கூட்டலை மும்மடித் தொகைகளாலும் (triple integral), m ஐ dm ஆலும் பிரதியிட வேண்டும்.

பிண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தை அதன் திணிவு மையம் என்றும் பொருண்மை மையம் (centre of mass) என்றும் குறிப்பிடலாம்.

வரையறை 2 : பிண்டத்தின் உந்தம் (Momentum of a body)

பிண்டம் N துகள்களினுல் அமைக்கப்பட்டது என்க. ஒரு குறிப்பிட்ட துகளின் பொருண்மை $m^{(\alpha)}$ என்க. நேரம் 't' ஆகும்

போது, ஒரு தெக்காட்டின் சுட்டச்சு அமைப்பைப் பொறுத்து அத் துகளின் திசைவேகம் $v_i^{(\alpha)}$ என்க.

$$\text{எனவே, துகளின் உந்தம்} = m^{(\alpha)}\, v_i^{(\alpha)}$$

பிண்டத்தின் எல்லாத் துகள்களினுடைய உந்தங்களின் கூட்டுத் தொகையைப் பிண்டத்தின் உந்தம் என்கிறோம். இதைப் பிண்டத்தின் நேர்கோட்டிய உந்தம் (linear momentum) என்றும் சொல்கிறோம். இதைக் குறிக்க G_i எனும் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

எனவே
$$G_i = \sum_{\alpha=1}^{N} m^{(\alpha)}\, v_i^{(\alpha)}$$

இதில் (α) ஐ நீக்கி,

$$G_i = \Sigma m v_i \qquad \text{......(144.2)}$$

வரையறை 3 : பிண்டத்தின் சுழல் உந்தம் (Angular momentum of a body)

ஒரு துகளின் உந்தமானது O என்னும் புள்ளியைச் சுற்றித் திரும்பும் திருப்புதிறனே, அப் புள்ளியைச் சுற்றித் துகளின் சுழல் உந்தம் (angular momentum of the particle about the point) என்கிறோம்.

நேரம் t ஆகும்போது ஒரு துகளின் திசை வேகம் v ஆகவும் O வைப் பொறுத்து அதன் அமைநிலை வெக்டர் r ஆகவும் இருப்பின்,

$$\left.\begin{array}{r}O \text{ வைச் சுற்றி அத் துகளின்} \\ \text{சுழல் உந்தம்}\end{array}\right\} = r \times (mv) \text{ ஆகும்.}$$

$$= \epsilon_{ikl}\, x_k\, m v_l$$

[இங்கு x_k என்பன O வின் வழியாகச் செல்லும் இலக்கு அச்சுத் தொகுதியைப் பொறுத்து **r** ஆல் குறிக்கப்படும் துகளின் இலக்கெண்கள்].

பிண்டத்தின் எல்லாத் துகள்களினுடைய சுழல் உந்தங்களின் கூட்டுத்தொகையைப் பிண்டத்தின் சுழல் உந்தம் என்கிறோம். இதை $H_i(O)$ ஆல் குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே O வைச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் சுழல் உந்தம்,

$$H_i(O) = \Sigma \epsilon_{ikl}\, x_k\, m v_l.$$

145. சில தேற்றங்கள்

தேற்றம் 1: ஒரு பிண்டத்தின் நேர்கோட்டிய உந்தமானது, அதன் முழுப் பொருண்மையும் புவியீர்ப்பு மையத்தில் மையங் கொண்டு, புவியீர்ப்பு மையத்தின் திசைவேகத்தோடு நகரும்போது ஏற்படும் உந்தத்திற்குச் சமம்.

நிருபணம்: வரையறைப்படி $\xi_i = \dfrac{\Sigma m x_i}{\Sigma m}$

't' யைப் பொறுத்து வகையிட

$$\dot{\xi}_i = \frac{\Sigma m \dot{x}_i}{\Sigma m}$$

எனவே $$(\Sigma m)\, \dot{\xi}_i = \Sigma m\, v_i \qquad ......(145.1)$$

$\dot{\xi} =$ புவியீர்ப்பு மையத்தின் திசைவேகம் $= V_i$ என்க.

$\Sigma m =$ பிண்டத்தின் முழுப்பொருண்மை M.

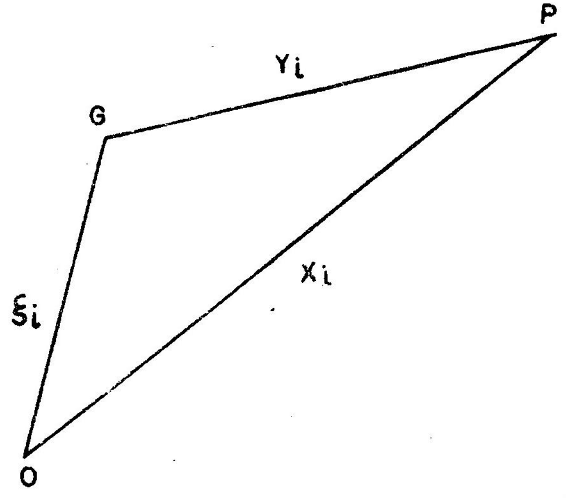
$\Sigma m\, v_i = G_i$ பிண்டத்தின் நேர்கோட்டிய உந்தம்.

145.1-ல் பிரதியிட $M\, V_i = G_i$ இதுவே வேண்டும் முடிவு.

தேற்றம் 2: O என்னும் புள்ளியைச் சுற்றி ஒரு பிண்டத்தின் சுழல் உந்தம் ஆனது, புவியீர்ப்பு மையம் G யைச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் சுழல் உந்தம், பிண்டத்தின் முழுப் பொருண்மையும் G-ல் வைக்கப்பட்டால் அதனுல் O வைச் சுற்றி உண்டாகும் சுழல் உந்தம் இவற்றின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

நிருபணம்: P-ன் இலக்கெண்கள் x_i என்க. $G\,(\xi_i)$ பிண்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்.

G யைப் பொறுத்து P-ன் இலக்கெண்கள் y_i என்க.



இனி, வரையறையின்படி, $H_i(O)=\Sigma\, \epsilon_{ikl}\, x_k\, m\, v_l$

$$=\Sigma\, \epsilon_{ikl}\,(y_k+\xi_k)\, mv_l$$
$$=\Sigma\, \epsilon_{ikl}\, y_k\, mv_l+\Sigma\, \epsilon_{ikl}\, \xi_k\, mv_l$$
$$=H_i(G)+\epsilon_{ikl}\, \xi_k\, \Sigma\, mv_l$$
$$H_i(O)=H_i(G)+\epsilon_{ikl}\, \xi_k\, MV_l$$

இங்கு $H_i(G)=G$ யைச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் சுழல் உந்தம். $\epsilon_{ikl}\, \xi_k\, MV_l=$ முழுப் பொருண்மையும் G-ல் வைக்கப்பட்டால் Oவைச்சுற்றி ஏற்படும் சுழல் உந்தம்.

146. கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்

கட்டிறுக்கப் பிண்டம் பல துகள்களால் ஆனது. இந்தத் துகள் களின்மேல் செயல்படும் விசைகளை அகவிசைகள் (Internal forces), புற விசைகள் (External forces) என இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம். அக விசைகளாவன பிண்டத்திற்குள்ளேயே துகள்கள் ஒன்றின் மேல் ஒன்று செயல்படுவதால் ஏற்படுவன. புற விசைகளாவன பிண்டத்திற்கு வெளியே இருந்து பிண்டத்தின்மேல் செயல்படுவன. பிண்டத்தின் உள்ளே ஏற்படும் அக விசைகள் துகளினிடையே உள்ள வினை, எதிர்வினைகளால் (action and reaction) ஏற்படுவதால் நியூட்டனின் மூன்றும் விதிப்படி அவற்றின் கூட்டு விளைவு பூச்சிய மாகும். $OX_1X_2X_3$ என்னும் ஒரு நிலைத்த அமைப்பைப் பொறுத்து நேரம் t ஆகும்போது m பொருண்மையுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட துகளின் அமைவிடம் x_i என்க. X_i, Y_i என்பன முறையே, அத் துகளின்மீது செயல்படும் புற, அகவிசைகள் என்க.

எனவே, $m\ddot{x}_i = X_i + Y_i$ என்பது அத் துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு. ......(146.1)

எல்லாத் துகள்களுக்கும் இது போன்றே அமைத்து அவற்றைக் கூட்ட

$$\Sigma m\ddot{x}_i=\Sigma X_i+\Sigma Y_i$$

ஆனால் $\Sigma Y_i=0$

எனவே $\Sigma m\ddot{x}_i=\Sigma X_i$ ......(146.2)

அடுத்து 146.1-ல் இருந்து $m\ddot{x}_i-X_i-Y_i$ என்பது ஓர் இயக்கமிலா அமைப்பு (Statical system). எனவே ஆதியைச் சுற்றி அதன் திருப்புதிறனை எழுதினால் அது பூச்சியமாகும்.

$$\epsilon_{kli}\, x_l\,(m\ddot{x}_i-X_i-Y_i)=0$$

எல்லாத் துகள்களுக்கும் கூட்ட

$\Sigma\epsilon_{kli}\, x_l\, m\ddot{x}_i = \Sigma\epsilon_{kli}\, x_l\, x_i + \Sigma\epsilon_{kli}\, x_l\; Y_i$

ΣY_i ஓர் இயக்கமிலா அமைப்பாகையால்

$\Sigma\epsilon_{kl}\, x_l\, Y_i = 0.$

எனவே $\Sigma\epsilon_{kli}\, x_l\, m\,\ddot{x}_i = \Sigma\epsilon_{kli}\, x_l\, X_i$ ......(146.3)

146.2, 146.3 என்னும் இரு பண்புருச் சமன்பாடுகளும் பிண்டத்தின் இயக்கச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

147. உந்த, சுழல் உந்த மாற்று வீதங்கள்

தேற்றம் :

1. ஒரு பிண்டத்தின் உந்த மாற்று வீதம் (Rate of change of momentum) அதன்மேல் செயல்படும் புறவிசைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.

2. ஒரு நிலைத்த புள்ளியைச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் சுழல் உந்த மாற்று வீதம் அப்புள்ளியைச் சுற்றிப் புறவிசைகளின் திருப்பு திறன்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் ஆகும்.

நிருபணம் :

1. $G_i = \Sigma m v_i$
$= \Sigma m\ddot{x}_i$

t ஐப் பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dG_i}{dt} = \Sigma m\ddot{x}_i$$

146.2 ஐப் பயன்படுத்த

$$\frac{dG_i}{dt} = \Sigma X_i = F_i \qquad ......(147.1)$$

2. $H_i\,(0) = \Sigma\epsilon_{ikl}\, x_k\, m v_l$
$= \Sigma\epsilon_{ikl}\, x_k\, m\,\dot{x}_i$

t ஐப் பொறுத்துப் பிரதியிட

$$\frac{dH_i}{dt} = \Sigma\epsilon_{ikl}\;\dot{x}_k\; m\,\dot{x}_l + \Sigma\epsilon_{ikl}\, x_k\; m\ddot{x}_l$$

$$= 0 + \Sigma\epsilon_{ikl}\, x_k\, m\ddot{x}_l$$

146.3 ஐப் பயன்படுத்த

$$\frac{dH_i}{dt} = \Sigma\epsilon_{ikl}\, x_k\, X_l \qquad ......(147.2)$$

$\Sigma\epsilon_{ikl}\, x_k\, X_l = L_i$ எனில்

$$\frac{dH_i}{dt} = L_i$$

148. நேர்கோட்டிய உந்தம், சுழல் உந்தம் இவற்றின் காப்புநிலை (Conservation of linear momentum and angular momentum)

கீழ்க்கண்ட இரு கூற்றுகளை நேர்கோட்டிய, சுழல் உந்தங்களின் காப்புநிலைகள் என்கிறோம்.

1. பிண்டம் இயக்கத்திலிருக்கும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் புறவிசைகளின் குத்துப் பிரிவுகளின் (Resolved parts) கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் எனில், அத் திசையில், நேர்கோட்டிய உந்தத்தின் குத்துப்பிரிவு ஒரு மாறிலி ஆகும்.

2. பிண்டம் இயக்கத்திலிருக்கும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் புறவிசைகள் ஒரு புள்ளியைச் சுற்றி ஏற்படுத்தும் திருப்புதிறன்களின் குத்துப்பிரிவுகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் எனில் அத் திசையில், அதே புள்ளியைச் சுற்றிய சுழல் உந்தத்தின் குத்துப் பிரிவு ஒரு மாறிலி ஆகும்.

நிருபணம்: அந்தக் குறிப்பிட்ட திசையில் அலகு வெக்டர் a_i என்க.

எனவே $F_i a_i = 0$, $L_i a_i = 0$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$G_i a_i$, $H_i a_i$ என்பன மாறிலிகள் என நிரூபிக்கவேண்டும்.

$\frac{d}{dt}(G_i a_i)$, $\frac{d}{dt}(H_i a_i)$ களை எடுத்துக் கொள்ளவும்.

$$\frac{d}{dt}(G_i a_i) = a_i \frac{dG_i}{dt} = a_i F_i = 0$$

$$\frac{d}{dt}(H_i a_i) = a_i \frac{dH_i}{dt} = a_i L_i = 0$$

எனவே $G_i a_i$, $H_i a_i$ என்பன மாறிலிகள்.

149. பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல் (Kinetic energy of a body)

நேரம் t ஆகும்போது m பொருண்மையுள்ள துகளின் திசைவேகம் v_i என்க.

அத் துகளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m v_i v_i$ எல்லாத் துகள்களின் இயக்க ஆற்றல்களின் சேர்க்கையைப் பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல் என்கிறோம்.

எனவே பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல் $= = \Sigma \frac{1}{2} m v_i v_i$.

தேற்றம் : ஒரு பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றலானது, திணிவு மையத்தைச் சார்ந்து பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல் மற்றும் பிண்டத்தின் முழுப் பொருண்மையும் திணிவு மையத்தில் மையங் கொள்வதால் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இவற்றின் சேர்க்கைக்குச் சமம் ஆகும்.

நிரூபணம் : $OX_1X_2X_3$ என்ற இலக்கெண் அமைப்பைக் கொள் வோம். நேரம் t ஆகும்போது m பொருண்மையுள்ள P என்ற துகளின் இலக்கெண்கள் x_i என்க. திணிவு மையம் G-ன் இலக் கெண்கள் ξ_i என்க. G-ன் வழியே $OX_1X_2X_3$-க்கு இணையாக வரையப்பட்ட இலக்கெண் அமைப்பில் P-ன் இலக்கெண்கள் y_i என்க.

எனவே $$x_i = \xi_i + y_i$$

அடுத்து,

$$\text{பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல்} = \Sigma \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i$$

$$= \Sigma \frac{m}{2} (\dot{\xi}_i + \dot{y}_i)(\dot{\xi}_i + \dot{y}_i)$$

$$= \Sigma \frac{m}{2} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_i + \Sigma \tfrac{1}{2} m \dot{y}_i \dot{y}_i + \Sigma \tfrac{1}{2} m \dot{\xi}_i \dot{y}_i$$

$$= \tfrac{1}{2} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_i (\Sigma m) + \Sigma \tfrac{1}{2} m \dot{y}_i \dot{y}_i + \dot{\xi}_i \Sigma m \dot{y}_i$$

ஆனல் $\Sigma m y_i = 0$ எனவே $\Sigma n \dot{y}_i = 0$

$$\therefore \text{பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல்} = \Sigma \tfrac{1}{2} m \dot{y}_i \dot{y}_i + \tfrac{1}{2} M \dot{\xi}_i \dot{\xi}_i$$

$\Sigma \frac{1}{2} m \dot{y}_i \dot{y}_i$ = G-யைச் சார்ந்து பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல்

$\frac{1}{2} M \dot{\xi}_i \dot{\xi}_i$ = திணிவு மையத்தில் M மையங் கொள்வதால் ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல்.

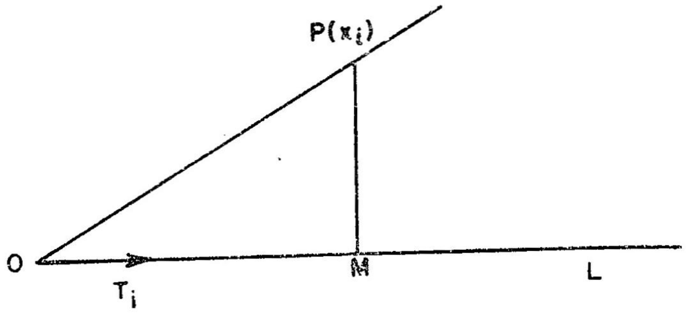
150. நிலைமப் பண்புரு (Inertia Tensor)

அடுத்துக் கட்டிறுக்கப் பிண்டங்களின் இயக்க விசையியலில் மிக்க பயனுள்ள பண்புருவான நிலைமப் பண்புருவை வரையறை செய்கிறோம்.

வரையறை : O என்பது ஒரு நிலைப்புள்ளியாக இருக்கட்டும். O-வின் வழியே $OX_1 X_2 X_3$ எனும் ஒரு செவ்வகத் தெக்காட்டின்

இலக்கெண் அமைப்பை எடுத்துக்கொள்வோம். இவ் வமைப்பில் m பொருண்மையுள்ள P என்ற துகளின் இலக்கெண்கள் x_i என்க.

OL என்பது O-ன் வழியே செல்லும் ஒரு நேர்கோடு என்க. T_i என்பது OL-ன் திசையில் அலகு வெக்டர் என்க. P-ல் இருந்து OL-க்குச் செங்குத்துத்தூரம் 'MP' எனில் $m\ (MP)^2$ ஐ OL ஐச் சுற்றித் துகளின் நிலைமத் திருப்புதிறன் (moment of inertia) என்கிறோம்.



அடுத்து $(MP)^2 = (OP)^2 - (OM)^2$

$$= x_p\, x_p - (x_i\, T_i)_2$$

எனவே $(MP)^2 = x_p\, x_p - x_i\, x_j\, T_i\, T_j$

$$= x_p\, x_p\, \delta_{ij}\, T_i\, T_j - x_i\, x_j\, T_i\, T_j$$

$$= (x_p\, x_p\, \delta_{ij} - x_i\, x_j)\, T_i\, T_j$$

எனவே OL ஐச் சுற்றித் துகளின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $m(MP)^2 = m(x_p\, x_p\, \delta_{ij} - x_i\, x_j)\, T_i\, T_j$ OL-ஐச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன், பிண்டத்தின் எல்லாத் துகள்களின் நிலைமத் திருப்புதிறன்களின் கூட்டுத்தொகையாகும். ஆகவே, OL ஐச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன்

$$= \Sigma m\, (x_p\, x_p\, \delta_{ij} - x_i\, x_j)\, T_i\, T_j$$

$$= T_i\, T_j\ \Sigma m\, (x_p\, x_p\, \delta_{ij} - x_i\, x_j)$$

[T_i அலகு வெக்டர் ஆதலின்]

$\Sigma m\, (x_p\, x_p\, \delta_{ij} - x_i\, x_j) = I_{ij}$ என எழுதுகிறோம்.

எனவே OL ஐச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= I_{ij}\, T_i\, T_j$.

I_{ij} ஓர் இரண்டாம் அடைவு சமச்சீர்ப் பண்புரு, இது O-ன் நிலையைச் சார்ந்தது. O மாறும்போது I_{ij} மாறும். ஆனால், இது OL-ன் திசையைப் பொறுத்தது அன்று. O-வின் வழியாகச்

செல்லும் எல்லா நேர்கோடுகளுக்கும் I_{ij} ஒன்றே. இதைப் பிண்டத்தின் ' O-ன் சார்புடைய நிலைமப் பண்புரு ' என்கிறோம்.

குறிப்பு: O-ன் சார்புடைய I_{ij} கொடுக்கப்பட்டால், O ன் வழியாகச் செல்லும் எந்தவொரு நேர்கோட்டைச் சுற்றியும் பிண்டத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறனை எழுதலாம்.

I_{ij} ஐ விரித்து எழுதினால் அதன் கூறுகள் பின்வருமாறு:

$$\begin{bmatrix} \Sigma m\,(x_2^2+x_3^2) & -\Sigma m\,x_1 x_2 & -\Sigma m\,x_1 x_2 \\ -\Sigma m\,x_1 x_2 & \Sigma m(x_3^2+x_1^2) & -\Sigma m\,x_2 x_3 \\ -\Sigma m\,x_3 x_1 & -\Sigma m\,x_3 x_2 & \Sigma m(x_1^2+x_2^2) \end{bmatrix}$$

இவற்றில் முதன்மை மூலைவிட்டத்தில் உள்ள கூறுகள் I_{11}, I_{22}, I_{33} என்பன முறையே OX_1, OX_2, OX_3 அச்சுகளைச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன்கள் ஆகும்.

மற்றக் கூறுகள் குறைக்குறி முன்னிட்ட நிலைமப் பெருக்கங்கள்(Products of Inertia) ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$I_{12} = -\Sigma m\,x_1\,x_2$

= குறைக்குறி முன்னிட்ட, OX_1, OX_2 அச்சுகளைச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் நிலைமப் பெருக்கம்.

அடுத்து $I_{ij}\,x_i\,x_j=1$ என்னும் சமன்பாடு ஒரு நீள்வட்டத் திண்மத்தைக் (Ellipsoid) குறிக்கிறது. இது திருப்புதிறனின் நீள்வட்டத் திண்மம் (Momental Ellipsoid) ஆகும்.

151. O, திணிவுமையம் G இவற்றைச் சார்புடைய நிலைமப் பண்புருக்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு

$OX_1\,X_2\,X_3$ என்னும் அச்சுத் தொகுதியைப் பொறுத்து m பொருண்மையுள்ள P என்ற துகளின் இலக்கெண்கள் x_i என்க. திணிவு மையம் G-ன் இலக்கெண்கள் ξ_i என்க. G-ன் வழியாகச் செல்லும் ஓர் இணை அச்சுத் தொகுதியைப் பொறுத்து P ன் இலக்கெண்கள் y_i என்க.

எனவே $\quad x_i=\xi_i+y_i$

அடுத்து

$$I_{ij}(O)=\Sigma m\,(x_p x_p\,\delta_{ij}-x_i x_j)$$
$$=\Sigma m\, x_p x_p\,\delta_{ij}-\Sigma m x_i x_j$$
$$=\Sigma m\,(\xi_p+y_p)(\xi_p+y_p)\,\delta_{ij}$$
$$-\Sigma m\,(\xi_i+y_i)(\xi_j+y_j)$$
$$=\Sigma m\,(\xi_p\,\xi_p\,\delta_{ij}-\xi_i\,\xi_j)$$
$$+\Sigma m\,(y_p\,y_p\,\delta_{ij}-y_i\,y_j)$$
$$+2\,\Sigma m\,\xi_p\,y_p\;\delta_{ij}-\Sigma m\,\xi_i\,y_j-\Sigma m\xi_j\,y_i$$
$$=(\xi_p\xi_p\,\delta_{ij}-\xi_i\xi_j)\,(\Sigma m+I_{ij}(G)$$
$$+2\,\xi_p\,\delta_{ij}\,\Sigma m y_p-\xi_i\,\Sigma m)\,y_j-\xi_i\,\Sigma m\,y_i$$

ஆனால் $\Sigma m\; y_i=0$

எனவே $$I_{ij}(O)=I_{ij}(G)+M\,(\xi_p\,\xi^p\,\delta_{ij}-\xi_i\,\xi_j \qquad \ldots\ldots(151.1)$$

எனவே O ஐச் சார்புடைய நிலைமப் பண்புருவானது, G ஐச் சார்புடைய நிலைமப் பண்புருப் பிண்டத்தின் முழுப்பொருண்மையும் G-ல் இருக்கும்போது O-வைச் சுற்றி அதன் நிலைமப் பண்புரு ஆகிய இரு பண்புருக்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

குறிப்பு 1 : 15.1-ல் இருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவிற்கு வருகிறோம் :

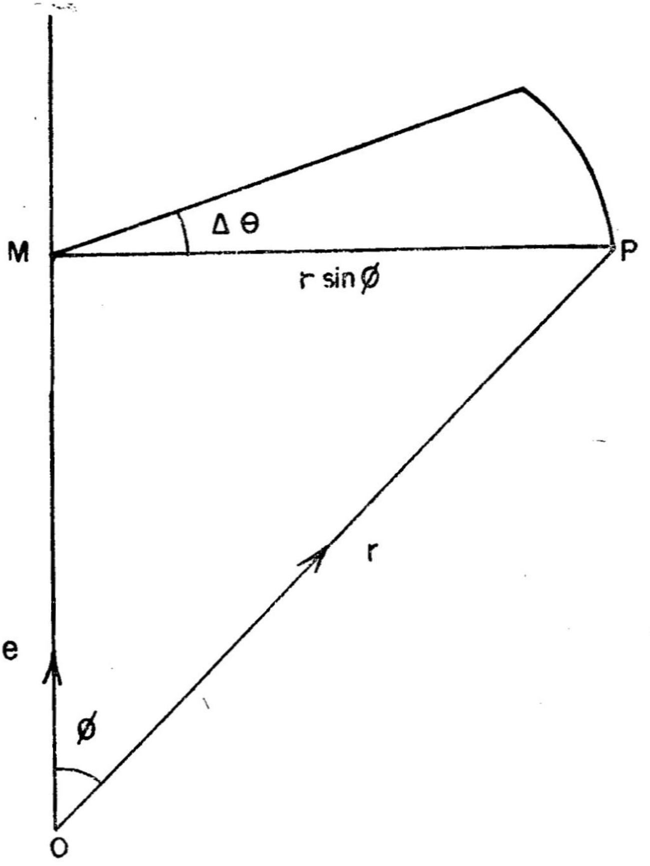
இரு அமைப்புகள் ஒரே பொருண்மையும், ஒரே திணிவு மையமும் உடையனவாகவும், ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியைச் சார்ந்து ஒரே நிலைமப் பண்புரு உடையனவாகவும் இருந்தால் 151.1 ன்படி எந்த ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியும் அவற்றின் நிலைமப் பண்புருக்கள் சமம். அவ்வாறான இரு அமைப்புகளைச் **சம திருப்புதிறன் அமைப்புகள்** (Equimomental systems) என்கிறோம்.

குறிப்பு 2 : சமன்பாடு 151.1-ன் இரு பக்கங்களையும் T_iT_j ஆல் பெருக்க

$I_{ij}(O)\,T_iT_j=I_{ij}(G)\,T_iT_j+M\,(\xi_p\xi_p\,\delta_{ij}-\xi_i\xi_j)\;T_iT_j$ எனக் கிடைக்கிறது. இது நிலைமத் திருப்புதிறனின் **இணை அச்சுத் தேற்றம்** (Theorem of parallel axes) ஆகும். இம் முடிவை சொற்களில் எழுதினால், OL என்னும் அச்சைச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன் ஆனது, G வழியாக OL-க்கு இணையாக வரையப் படும் அச்சைச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் நிலைமத் திருப்புதிறன், முழுப் பொருண்மை Mஐ G ல் வைப்பதால் OL ஐச் சுற்றி ஏற்படும் நிலைமத் திருப்புதிறன் இவற்றின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

152. ஒரு புள்ளி நிலையாக உள்ள கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தின் இயக்கம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தில் ஒரு புள்ளி O நிலையானதாக இருப்பின் அதன் இயக்கம் O வின் வழியாகச் செல்லும் OL என்னும் ஏதோவொரு அச்சைச் சுற்றிச் சுழற்சியாகும்.



நிலைப்புள்ளி ஆன O-வை ஆதியாகக் கொள்வோம். OL-ன் திசையில் அலகு வெக்டர் **e** என்க. பிண்டம் OL ஐச் சுற்றி 4θ என்னும் மிகச்சிறிய கோண அளவு சுழல்கிறது என்க. பிண்டம் கட்டிறுக்கமானது ஆதலின் ஒவ்வொரு துகளும் $\Delta\theta$ அளவு சுழலும். P என்னும் துகளின் அமைநிலை வெக்டர் இச் சுழற்சியினல் **r**-லிருந்து $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ ஆகிறது என்க. **e**-க்கும் **r**-க்கும் இடைக்

கோணம் ϕ எனில் Δr-ன் நீளம் $r \sin \phi \Delta\theta$ என்பது தெளிவு. மேலும் Δr ஆனது e, r இவற்றிற்குச் செங்குத்தானது.

என்வே $\Delta \mathbf{r} = \Delta\theta\ \mathbf{e} \times \mathbf{r}$

$$\therefore \quad \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\ \mathbf{e} \times \mathbf{r}$$

$\Delta t \to 0$ ஆகும்போது எல்லை காண

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\theta}\ \mathbf{e} \times \mathbf{r}$$

$\dot{\theta}$e ஐ w ஆல் குறித்தால்

$$\dot{\mathbf{r}} = w \times \mathbf{r} \qquad \text{......(152.1)}$$

w ஐ சுழல்வேக வெக்டர் என்கிறோம்.

$\dot{\mathbf{r}}$ என்பது P-ன் திசைவேக வெக்டர் ஆகும்

152-1 ஐப் பண்புருக் குறியீட்டில்

$$v_i = \epsilon_{ikj}\ w_k\ x_j \qquad \text{......(152.2)}$$

என்று எழுதலாம்.

153. ஒரு புள்ளி நிலையாக உள்ள கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல்

O என்பது பிண்டத்தின் நிலையான புள்ளி என்க. O-ன் வழியாகச் செல்லும் $O\ X_1 X_2 X_3$ என்னும் அச்சு அமைப்பு எடுத்துக் கொள்க. நேரம் t ஆகும்போது m பொருண்மையுள்ள துகள் P-ன் இலக்கெண்கள் x_i என்க.

w_i பிண்டத்தின் சுழல்வேகம் என்க. அடுத்து, 152.2-ன் படி

P-ன் திசைவேகம் $v_i = \epsilon_{ikl}\ w_k\ x_l$

எனவே பிண்டத்தின் இயக்க ஆற்றல் $= \sum \frac{1}{2} m v_i v_i$

$$= \Sigma \tfrac{1}{2}\ m\ \epsilon_{ikl}\ w_k\ x_l\ \epsilon_{ipq}\ w_p\ x_q$$
$$= \Sigma \tfrac{1}{2}\ m\ (\delta_{kp}\ \delta_{lq} - \delta_{kq}\ \delta_{lp})\ w_k\ w_p\ x_l\ x_q$$
$$= \Sigma \tfrac{1}{2}\ m\ (w_k\ w_k\ x_q\ x_q - w_k\ x_k\ w_l\ x_l)$$
$$= \Sigma \tfrac{1}{2}\ m\ w_k\ (\delta_{lk}\ w_l\ x_q\ x_q - w_l\ x_k\ x_l)$$
$$= \Sigma \tfrac{1}{2}\ m\ w_k\ w_l\ (x_q\ x_q\ \delta_{lk} - x_k\ x_l)$$
$$= \tfrac{1}{2}\ w_k\ w_l \sum m\ (x_q\ x_q\ \delta_{lk} - x_k\ x_l)$$
$$= \tfrac{1}{2}\ w_k\ w_l\ I_{kl}\ (O)$$

154. ஒரு புள்ளி நிலையாக உள்ள கட்டிறுக்கப் பிண்டத்தின் சுழல் உந்தம்

முந்தைய நூற்பிரிவின் குறியீடுகளை அப்படியே ஏற்கிறோம்.

$$P\,(x_i)\text{-ன் உந்தம்} = mv_i$$

$$= m\,\epsilon_{ikl}\,w_k\,x_l\,.$$

எனவே O ஐச் சுற்றி $P\,(x_i)$-ன் சுழல் உந்தம்

$= O$ ஐச் சுற்றி P-ன் உந்தத்தின் திருப்புதிறன்

$$= \epsilon_{pqi}\,x_q\,m\,\epsilon_{ikl}\,w_k\,x_l$$

$$= m\,\epsilon_{ipq}\,\epsilon_{ikl}\,x_q\,x_l\,w_k$$

$$= m\,[\delta_{pk}\,\delta_{ql} - \delta_{pl}\,\delta_{qk}]\,x_p\,x_l\,w_k$$

$$= m\,[w_p\,x_q\,x_q - w_q\,x_p\,x_q]$$

$$= m\,[w_p\,x_q\,x_q - x_p\,w_k\,x_k]$$

$$= m\,[\delta_{pk}\,w_k\,x_q\,x_q - x_p\,x_k\,w_k]$$

$$= m\,w_k[x_q\,x_q\,\delta_{pk} - x_p\,x_k]$$

எனவே O ஐச் சுற்றிப் பிண்டத்தின் சுழல் உந்தம்

$$= \Sigma m\,w_k\,[x_q\,x_q\,\delta_{pk} - x_p\,x_k]$$

$$= w_k\,\Sigma m\,[x_q\,x_q\,\delta_{pk} - x_p\,x_k]$$

$$= w_k\,I_{pk}\,(O).$$

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(Bibliography)

1. **Barry Spain** — Tensor Calculus (University Mathematical Texts : Oliver & Boyd, London, 1965)

2. **Bickley & Gibson** — Via Vector to Tensor (The English University Press, London, 1963)

3. **Borisenko A. I. & Tarapov, I. E.** — Vector Analysis and Tensor Calculus (Rajkamal Prakashan (Pvt) Ltd., Delhi-6, 1963)

4. **Harry Lass** — Vector and Tensor Analysis (Mc Graw Hill, N. Y., 1950)

5. **Hay, G. E.** — Vector and Tensor Analysis (Dover Books on Advanced Mathematics, N. Y., 1953)

6. **Krishnamurthy Karam Chetti** — Vector Analysis and Cartesian Tensors (Holden-Day, Sanfrancisis)

7. **Mc Connell, A. J.** — Applications of Tensor Analysis (Dover Books on Advanced Mathematics, N.Y. 1947)

8. **Mercier (Jacques I)**— An introduction to Tensor Calculus (Wolters Noordhoff Pub-Nether lands, 1971)

9. **Shanti Narayanan** — A Text Book of Cartesian Tensors (S. Chand & Co., Delhi, 1968)

10. **Sokolnikoff, I. S.** — Tensor Analysis (Applied Mathematics Series—John Wiley & Sons Inc., N. Y., 1967)

11. **Spiegel (Muray, R.)**— Vector Analysis with an Introductions to Tensor Analysis (Schaums' Series Mc Graw Hill, N. Y., 1959)

12. **Synge, J. L. & Schild, A** — Tensor Calculus (Mathematical Expositions-University of Toronto Press, Toronto, 1964)

13. **Thomas, T. Y.** — The Elementary Theory of Tensors with Applications to Geometry and Mechanics (Mc Graw Hill, N. Y.)

14. **Weatherburn, C. E.** — An Introduction Riemannian Geometry and the Tensor Calculus (Cambridge University Press, London, 1963)

15. **Wills, A. P.** — Vector Analysis with an Introduction to Tensor Analysis (Dover Publications Inc., N. Y.)

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute tensor — தனித்த பண்புரு
Abstract — கருத்தியலான
Acceleration — முடுக்கம்
Angular momentum — சுழல் உந்தம்
Angular velocity — சுழல்வேகம்
Applied Mathematics — பயன்பாட்டுக் கணிதம்
Arc length — வில்தூரம்
Associated tensors — துணைப் பண்புருக்கள்
Axis — அச்சு
Axes of reference — சுட்டச்சுகள்

B

Base — அடிப்படை
Binormal — துணைச் செங்குத்து
Bianchi's identity — பையன்சியின் முற்றொருமை
Body — பிண்டம்

C

Calculus of variations — மாறுசார்புகளின் நுண்கணிதம்
Cartesium coordinates — தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள்
Catenary — சங்கிலி வளைவு
Catenoid — சங்கிலி வளைவுத் திண்மம்
Christoffel symbols — கிறித்தஃபல் குறியீடுகள்
Codazzi equations — கொடசிச் சமன்பாடுகள்
Cofactor — இணைச்சினை
Components — கூறுகள்
 —of a vector — வெக்டரின் கூறுகள்
 —of a tensor — பண்புருவின் கூறுகள்
 —Physical — இயற்பியல் கூறுகள்

Conjugate — இணையிய
Conservative force field — காப்புநிலை விசைக்களம்
Constant — மாறிலி
Contraction — குறுக்கம்
Contravariant — முரண்மாறி
Convention — மரபு
Coordinates — இலக்கெண்கள்
—Cartesian — தெக்காட்டின் இலக்கெண்கள்
—Curvilinear — வளைகோட்டிய இலக்கெண்கள்
—Cylindrical — உருளை இலக்கெண்கள்
—Elliptic — நீளவட்ட இலக்கெண்கள்
—Geodesic — குறுக்கடி இலக்கெண்கள்
—Orthogonal Curvilinear — செங்கோண வளைகோட்டிய இலக்கெண்கள்
—Parabolic — பரவளைய இலக்கெண்கள்
—Plane — தள இலக்கெண்கள்
—Polar — துருவ இலக்கெண்கள்
—Rectilinear — நேர்கோட்டிய இலக்கெண்கள்
—Spherical polar — கோளத்துருவ இலக்கெண்கள்
Coordinate axes — இலக்கு அச்சுகள்
Coordinate curves — இலக்கு வளைவுகள்
Coordinate surfaces — இலக்கு தளங்கள்
Coordinate systems — இலக்கு அமைப்புகள்
Coordinate vectors — இலக்கு வெக்டர்கள்
Correspondence — ஒத்திசைவு
Covariant — உடன்மாறி
Critical point — இடர்ப்புள்ளி
Curl of a vector — வெக்டரின் சுழல்
Curvature — கோட்டம்
—Gaussian — காசின் கோட்டம்
—Geodesic — குறுக்கடிக் கோட்டம்
—Lines of — கோட்ட வளைவுகள்
—Mean — சராசரிக் கோட்டம்
—Normal — செங்குத்துக் கோட்டம்
—Principal — முதன்மைக் கோட்டம்
—Radius of — கோட்ட ஆரம்
—Riemannian — ரீமானின் கோட்டம்
—Tensor — கோட்டப் பண்புரு
—Total — முழுமைக் கோட்டம்

Curve — வளைவு, வளைகோடு
Curvilinear Coordinates — வளைகோட்டிய இலக்கெண்கள்
Cycloid — உருள்வளை

D

Deformable body — உருச்சிதையும் பிண்டம்
Delta - Kronecker — க்ரோனகர் டெல்டா
Density - Tensor — பண்புரு அடர்த்தி
—Scalar — அளவி அடர்த்தி
Derivative — வகைக்கெழு
—Covariant — உடன்மாறி வகைக்கெழு
—Intrinsic — உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு
—Tensor — பண்புரு வகைக்கெழு
Descartes — தெக்காட்டே
Determinant — அணிக்கோவை
Developable — பரத்தல் தன்மையுடைய
Differentiation — வகையிடல்
Dimension — பரிமாணம்
Direction - Principal — முதன்மைத் திசை
Displacement — இடப்பெயர்ச்சி
Divergence — பாய்வு
Dot Product — புள்ளிப் பெருக்கற்பலன்
Dummy Index — போலிச் சுட்டிணைப்பு
Dynamics — இயக்க விசையியல்

E

Edge — விளிம்பு
Einstein Space — ஐன்ஸ்டீன் வெளி
—Tensor — ஐன்ஸ்டீன் பண்புரு
Element - line — கோட்டு மூலம்
Energy — ஆற்றல்
—Constant of — ஆற்றல் மாறிலி
—Kinetic — இயக்க ஆற்றல்
—Potential — நிலை ஆற்றல்
Enneper's formula — என்னெபரின் சூத்திரம்
Entity — உருப்படி
Euclidean space — யூக்லிடின் வெளி

F

Field — களம்
Fixed — நிலையான
Flat space — தட்டைவெளி
Fluid — பாய்பொருள்
Force — விசை
—External — புறவிசை
—Internal — அகவிசை
Frames of reference — சுட்டமைப்புகள்
Free Index — கட்டற்ற சுட்டிணைப்பு
Frenet formulae — ஃப்ரெனெயின் சூத்திரங்கள்
Function — சார்பு
Fundamental
—Quadratic form — அடிப்படை இருபடி உரு
—Tensor — அடிப்படைப் பண்புரு

G

Gauss's equation — காசின் சமன்பாடு
Gaussian curvature — காசின் கோட்டம்
Geodesic — குறுக்கடி
Geodesic coordinate — குறுக்கடி இலக்கெண்
Geodesic curvature — குறுக்கடிக் கோட்டம்
Gradient — சாய்வு விகிதம்
Gravity — புவி ஈர்ப்பு
Gravitational field — ஈர்ப்புக் களம்
Greek indices — கிரேக்கச் சுட்டிணைப்புகள்

H

Helix — திருகு சுழல் வளைவு
Helicoid — திருகு சுழல் வளைத் திண்மம்
Homogeneous space — ஓரினத்தன்மையுடைய வெளி
Hyperbola — அதிபர வளையம்
Hyperplane — மாவிரி சமதளம்
Hyper-space — மாவிரி வெளி
Hyper sphere — மாவிரி கோளம்
Hyper surface — மாவிரி தளம்

I

Independent — சார்பிலா
—linearly — நேர்கோட்டுச் சார்பிலா
Index — சுட்டிணைப்பு
—dummy — போலிச் சுட்டிணைப்பு
—free — கட்டற்ற சுட்டிணைப்பு
—umbral — நிழலுருச் சுட்டிணைப்பு
Indicator — சுட்டி
Inertia — நிலைமம்
—moment of — நிலைமத் திருப்புதிறன்
—tensor — நிலைமப் பண்புரு
Infinitesimal — கழிநுண்
Inner multiplication — அகப் பெருக்கல்
Inner product — அகப் பெருக்கற்பலன்
Integral — தொகை
Integration — தொகை காணல்
Intrinsic — உள்ளார்ந்த
—differentiation — உள்ளார்ந்த வகையிடல்
—derivative — உள்ளார்ந்த வகைக்கெழு
Invariance — மாற்றமிலாத் தன்மை
Invariant — மாற்றமிலி
Isometric surface — சம அளவைத் தளம்

J

Jacobian — யாக்கோபின்

K

Kinematics — இயக்கவியல்
Kinetic energy — இயக்க ஆற்றல்
Kronecker delta — க்ரோனகர் டெல்டா

L

Lagrange's equation — இலக்ராஞ்சின் சமன்பாடு
Lagrangean — இலக்ராஞ்சின்
Laplacian operator — லாப்லாசியின் செயலி
Linear — நேர்கோட்டிய

Linearly
—dependent — நேர்கோட்டுச் சார்புடைய
—independent — நேர்கோட்டுச் சார்பிலாத
Line element — கோட்டு மூலம்
Line integral — கோட்டுத் தொகை
Linear vector spacc — நேர்கோட்டிய வெக்டர் வெளி

M

Magnitude — அளவு
Manifold — பல்லுருவெளி
Mass — பொருண்மை
Matrix — அணி
Mean curvature — சராசரிக் கோட்டம்
Metric — அளவை
Metric tensor — அளவைப் பண்புரு
Meusnier's Theorem — மெசினியரின் தேற்றம்
Moment of a force — விசையின் திருப்புதிறன்
Momentum — உந்தம்
—angular — சுழல் உந்தம்
—linear — நேர்கோட்டிய உந்தம்
—moment of — உந்தத் திருப்புதிறன்

N

Natural trajectory — இயல்பான கடவுபாதை
Negative — குறை
Newton's Law — நியூட்டனின் விதி
Non-trivial — சாரமுள்ள
Normal — செங்குத்து
—Coordinates — செங்குத்து இலக்கெண்கள்
—Curvature — செங்குத்துக் கோட்டம்
—Principal — முதன்மைச் செங்குத்து
—Vector — செங்குத்து வெக்டர்
Notation — குறியீட்டுமுறை
Null — இல்லாநிலை
—Curve — இல்லாநிலை வளைவு
—Geodesic — இல்லாநிலை குறுக்கடி

O

Oblique — சரிவான
—axes — சரிவு அச்சுகள்
—coordinates — சரிவு இலக்கெண்கள்
Operation — செயல்
Operator — செயலி
Order — அடைவு
—of a matrex — அணியின் அடைவு
—of a tensor — பண்புருவின் அடைவு
Ordered — முறைப்படுத்தப்பட்ட
Origin — ஆதி
Orthogonal — செங்கோண
Orthonormal system — செங்குத்தியல்பு அமைப்பு
Osculating plane — கொஞ்சுதளம்
Outer multiplication — புறப்பெருக்கல்
Outer product — புறப்பெருக்கற் பலன்

P

Parabola — பரவளையம்
Parameter — ஒட்டளவு
Parametric equations — ஒட்டளவுச் சமன்பாடுகள்
Particle — துகள்
Permutation symbols — வரிசைமாற்றுக் குறியீடுகள்
Physical components — பௌதீகக் கூறுகள்
Plane — சமதளம்
Point function — புள்ளிச் சார்பு
Pole — துருவம்
Polar coordinates — துருவ இலக்கெண்கள்
Position — அமைநிலை
Position vector — அமைநிலை வெக்டர்
Positive — மிகை
Positive definite — மிகை-உறுதி
Potential energy — நிலை ஆற்றல்
Prefix — முன்னிணைப்பு
Pressure — அழுத்தம்
Property — இயல்பு
Principal normal — முதன்மைச் செங்குத்து
Projection — வீச்சு

Q

Quadratic form — இருபடி உரு
Quotient Law — ஈவு விதி

R

Rank of a tensor — பண்புருவின் தகுநிலை
Reaction — எதிர்வினை
Rectangular — செவ்வக
Rectilinear — நேர்கோட்டிய
Relative tensor — சார்புடைப் பண்புரு
Regular point — ஒழுங்கான புள்ளி
Resolved part — குத்துப்பிரிவு
Resultant — விளைவு
Recci's tensor — ரிசியின் பண்புரு
—Theorem — ரிசியின் தேற்றம்
Riemann-Chritoffel tensor — ரீமான்-கிறித்தபல் பண்புரு
Riemannian space — ரீமான் வெளி
Right-handed system — வலக்கை அமைப்பு
Rigid body — கட்டிறுக்கப் பிண்டம்
Rotation — சுழற்சி

S

Scalar — அளவி
Scalar density — அளவி அடர்த்தி
—field — அளவிக் களம்
—product — அளவிப் பெருக்கற்பலன்
Singular point — அருநிலைப் புள்ளி
Skew-symmetric — எதிர்ச்சீர்
Space — வெளி
Spherical coordinates — கோள இலக்கெண்கள்
Strain — தகவிழுமை
Stress — தகவமுக்கம்
Sub-script — கீழ்க்குறி
Sub-space — கீழ்வெளி
Suffix — பின்னிணைப்பு
Summation Convention — கூட்டல் மரபு
Super-script — மேற்குறி
Surface — தளம்
Symbol — குறியீடு

Symmetric tensor	—	சமச்சீர்ப் பண்புரு
System	—	அமைப்பு

T

Tangent line	—	தொடுகோட்டு வரை
Tangent plane	—	தொடுகோட்டுச் சமதளம்
Tensor	—	பண்புரு
Torsion	—	முறுக்கம்
Trajectory	—	கடவு பாதை
Transformation of Coordinates	—	இலக்கெண்களின் நிலைமாற்றம்
Transformation Law	—	மாற்றுரு விதி
Trivial	—	சாரமற்ற

U

Umbilical point	—	உந்திப் புள்ளி
Unique	—	தன்னேரில்லாத
Unit vector	—	அலகு வெக்டர்

V

Variable	—	மாறி
Vector	—	வெக்டர்
Vector space	—	வெக்டர் வெளி
Velocity	—	திசைவேகம்

W

Weight of a tensor	—	பண்புருவின் நிறை
Weingarten's formulae	—	வெயின்கார்டனின் சூத்திரங்கள்
Work	—	வேலை
Work-function	—	வேலைச்சார்பு

X

X-axis	—	X-அச்சு
X-Coordinate	—	X-இலக்கெண்

Y

Y-axis	—	Y-அச்சு
Y-Coordinate	—	Y-இலக்கெண்

Z

Zero	—	பூச்சியம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை-600031

★

தமிழில் பயில்பவர்க்குக் கல்லூரிப் பாடநூல்கள்

(Tamil Medium Books for Colleges)

1975 ஏப்ரல்வரை 650 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன

★

மேலும் விரைவில் வெளிவருபவை

பொறியியல்	...	39	நூல்கள்
சட்டம்	...	17	„
மருத்துவம்	...	18	„
இயற்பியல்	....	23	„
வேதியியல்	...	20	„
தாவரவியல்	...	13	„
விலங்கியல்	...	14	„
கணிதம்	...	17	„
வணிகவியல்	...	37	„
பொருளாதாரம்	...	21	„
புவியியல்	...	11	„
வரலாறு	...	29	„
மனையியல்	...	1	„
தத்துவம்	...	4	„
உளவியல்	...	8	„
புள்ளியியல்	...	8	„
கல்வி	...	14	„
நிலப்பொதியியல்	...	6	„
அரசியல்	...	19	„

கிடைக்குமிடம்:

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனக் கிடங்கு

(கல்லூரிக் கல்வி இயக்குநர் அலுவலகச் சுற்றுக்குள்)

கல்லூரிச் சாலை, நுங்கம்பாக்கம்,

சென்னை - 600006

கல்லூரிப் பாடநூல்களுக்கு 20% கழிவு வழங்கப்படும்